X-MAT

Superpoderes Matemáticos para Concursos Militares

Volume 1

2ª edição

EPCAR

2010 - 2016

Renato Madeira

www.madematica.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão à Escola Preparatória de Cadetes do Ar (EPCAr) dos anos de 2010 a 2016 detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto. São 7 anos de prova, totalizando 132 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 7 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da EPCAr ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e mestre em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ) em 2015; participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog "Madamática".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante a elaboração dessa obra, e a meus filhos Daniel e Davi que eu espero sejam futuros leitores deste livro.

Renato Madeira

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2015/2016

1) O valor da soma $S=\sqrt{4}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{196}+\sqrt{195}}$ é um número
a) natural menor que 10.
b) natural maior que 10.
c) racional não inteiro.
d) irracional.

2) Um casal que planejou uma viagem de férias para uma ilha, onde há um hotel com acomodações A e B, pagou antecipadamente x reais pelas diárias na acomodação A, que cobrava R$ 110,00 por dia. Ao chegar no hotel eles optaram pela acomodação B, que cobrava R$ 100,00 pela diária, pois perceberam que, assim, eles poderiam ficar mais 2 dias hospedados neste hotel. Sabendo que, além dos x reais já pagos, eles ainda gastaram R$ 150,00 por dia com alimentação e que não houve outras despesas, a quantia que esse casal gastou nesse hotel é um número compreendido entre
a) 5100 e 5400
b) 5400 e 5900
c) 5900 e 6300
d) 6300 e 6800

3) As idades de dois irmãos hoje são números inteiros e consecutivos. Daqui a 4 anos, a diferença entre as idades deles será $\frac{1}{10}$ da idade do mais velho. A soma das idades desses irmãos, hoje, é um número
a) primo.
b) que divide 100.
c) múltiplo de 3.
d) divisor de 5.

4) Analise as afirmativas abaixo.
I) Uma pessoa perdeu 30% de seu peso em um mês. No mês seguinte, aumentou seu peso em 40%. Ao final desses dois meses, em relação ao peso inicial, o peso dessa pessoa diminuiu 2%.
II) Quando num supermercado tem-se a promoção “pague 3 produtos e leve 4”, o desconto concedido é de 30%.
III) Há alguns meses, uma certa casa podia ser comprada por 25% do seu valor atual. O aumento no valor da casa nesse período foi de 75%.
Entre as afirmativas acima, é (são) FALSA(S)
a) apenas a II.
b) apenas I e III.
c) apenas II e III.
d) I, II e III.

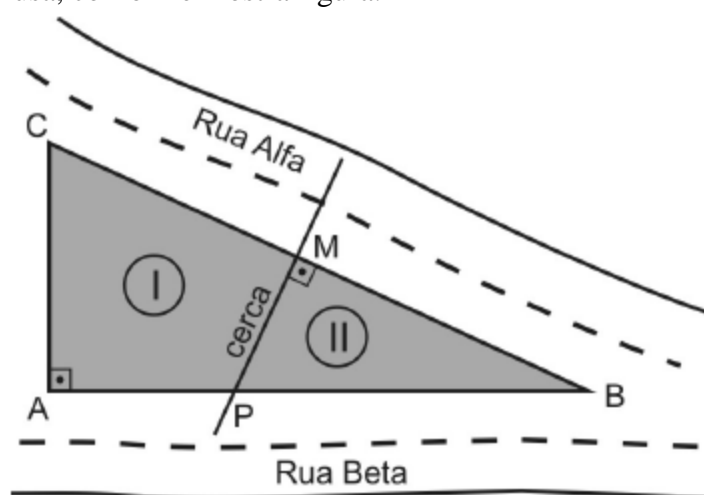
5) Uma caixa de capacidade $6,4\ \text{m}^3$ deve ser abastecida com água. Abaixo estão representados três recipientes que podem ser utilizados para esse fim.

Considerando que não há perda no transporte da água, afirma-se que:
I) Pode-se usar qualquer dos recipientes 100 vezes para encher a caixa.
II) Se os recipientes A, B e C forem usados, respectivamente, 16, 33 e 50 vezes, a caixa ficará com sua capacidade máxima.
III) Após usar 20 vezes cada um dos recipientes, ainda não teremos metade da capacidade da caixa ocupada.
Das afirmativas acima, tem-se que é (são) verdadeira(s)
a) nenhuma delas.
b) apenas a III.
c) apenas a II.
d) apenas a I.

6) Uma pessoa vai tomar um medicamento 3 vezes ao dia, durante 14 dias, em doses de $6\text{m}\ell$ cada vez. Se cada frasco contém $200\ \text{cm}^3$ do medicamento, a quantidade do segundo frasco que NÃO será utilizada é
a) menor que 75%.
b) exatamente 75%.
c) maior que 76%.
d) exatamente 76%.

7) Sobre os números reais positivos a, b, c, d, p e q, considere as informações abaixo:
I) $(\text{abc})^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{0,25}$ e $(\text{abcd})^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{10}$
II) $\sqrt[3]{\text{p}} = 32$ e $\sqrt{\text{q}} = 243$
O valor de $x = \dfrac{d}{(pq)^{\frac{1}{5}}}$ é um número
a) racional inteiro.
b) decimal periódico.
c) decimal exato menor que 1.
d) decimal exato maior que 1.

8) Analise as afirmativas seguintes e classifique-as em V (verdadeira) ou F (falsa).
(   ) Considere dois números pares, consecutivos e não nulos. O produto da soma dos inversos desses números pela metade do maior entre eles é um quociente entre dois números inteiros consecutivos.
(   ) Para todo $a \in \mathbb{R}$ e para todo $b \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $3x - a = 5bx + 5b$.
(   ) Se m é um número inteiro, ímpar e $m < -3$, então o menor valor para x, no conjunto solução da inequação $m(m+x) \le -3(x-3)$, é um número par positivo.
Tem-se a sequência correta em
a) V – F – V
b) F – V – V
c) F – V – F
d) V – F – F

9) Um terreno com formato de um triângulo retângulo será dividido em dois lotes por uma cerca feita na mediatriz da hipotenusa, conforme mostra figura.

Sabe-se que os lados AB e BC desse terreno medem, respectivamente, 80 m e 100 m. Assim, a razão entre o perímetro do lote I e o perímetro do lote II, nessa ordem, é
a) $\frac{5}{3}$
b) $\frac{10}{11}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{11}{10}$

10) O valor da expressão $\left(\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}\right)$, em que $x, y \in \mathbb{R}^*$ e $x \neq y$ e $x \neq -y$, é
a) -1
b) -2
c) 1
d) 2

11) O dono de uma loja de produtos seminovos adquiriu, parceladamente, dois eletrodomésticos. Após pagar $\frac{2}{5}$ do valor dessa compra, quando ainda devia R$ 600,00, resolveu revendê-los. Com a venda de um dos eletrodomésticos, ele conseguiu um lucro de 20% sobre o custo, mas a venda do outro eletrodoméstico representou um prejuízo de 10% sobre o custo. Com o valor total apurado na revenda, ele pôde liquidar seu débito existente e ainda lhe sobrou a quantia de R$ 525,00. A razão entre o preço de custo do eletrodoméstico mais caro e o preço de custo do eletrodoméstico mais barato, nessa ordem, é equivalente a

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2

12) Uma das curvas radicais de uma montanha russa será construída de modo que, quando observada, perceba-se a forma de uma parábola como mostra a figura. Será possível alcançar a maior altura, 280 m do solo, em dois pontos dessa curva, distantes 900 m um do outro, e a descida atingirá o ponto mais baixo da curva a 30 metros do solo, como se vê na figura.

A distância horizontal entre o centro da roda dianteira do carrinho 1 e o centro da roda traseira do carrinho 3 quando esses centros estiverem a 70 m do solo, é

a) 200 metros.
b) 250 metros.
c) 360 metros.
d) 400 metros.

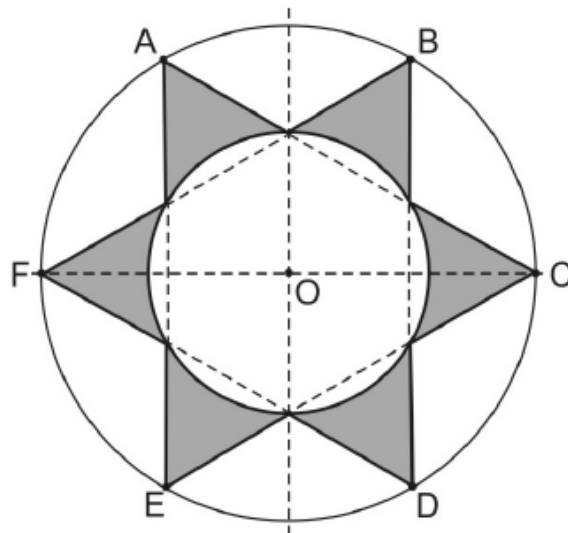
13) Duas máquinas A e B de modelos diferentes, mantendo cada qual sua velocidade de produção constante, produzem juntas n peças iguais, gastando simultaneamente 2 horas e 40 minutos. A máquina A funcionando sozinha, mantendo sua velocidade constante, produziria, em 2 horas de funcionamento, $\frac{n}{2}$ dessas peças. É correto afirmar que a máquina B, mantendo sua velocidade de produção constante, produziria também $\frac{n}{2}$ dessas peças em

a) 40 minutos.
b) 120 minutos.
c) 160 minutos.
d) 240 minutos.

14) As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme figura abaixo.

Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta AC no ponto P. Se $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ km, então $\overline{CP}$ é, em km, igual a

a) $6+\sqrt{3}$
b) $6(3-\sqrt{3})$
c) $9\sqrt{3}-\sqrt{2}$
d) $9(\sqrt{2}-1)$

15) Na figura abaixo A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 1 metro e centro O.

Se ACE e BDF são triângulos equiláteros, então, a área da parte sombreada, nessa figura, em m^2, é igual a

a) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\pi$
c) $\frac{\sqrt{3}-\pi}{3}$
d) $\sqrt{3}-\pi$

16) Numa turma de x alunos, $\frac{2}{3}$ são atletas (praticam um esporte) e suas preferências por modalidades esportivas estão expressas no gráfico abaixo.

Considerando que cada um desses alunos pratica o seu esporte preferido e que este é único, analise as afirmativas abaixo, classificando-as em V (verdadeira) ou F (falsa).
( ) Metade dos atletas gosta de vôlei ou basquete.
( ) 40% dos atletas preferem futebol.
( ) O número de alunos desta turma é menor que 25.
Tem-se a sequência correta em
a) F – F – F
b) V – V – V
c) F – V – F
d) V – F – V

PROVA DE MATEMÁTICA –EPCAr – 2014/2015

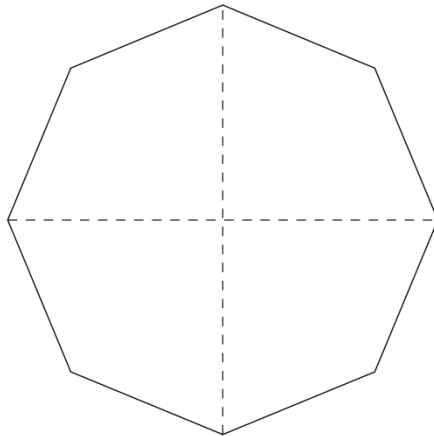
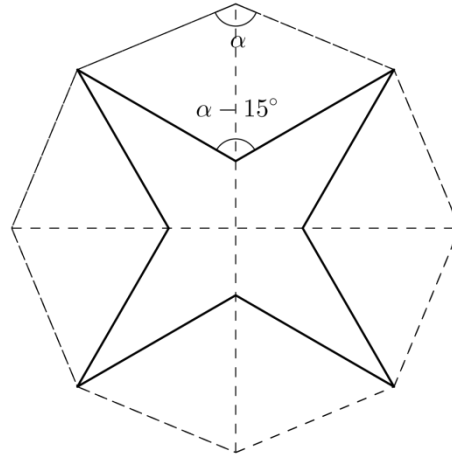
1) Juntamente com o Governador de um Estado, foram para uma reunião 4 Prefeitos. Cada Prefeito levou 4 Secretários e cada Secretário levou 4 Vereadores. Sabendo-se que nessa reunião não houve participação de mais nenhuma pessoa, então, o número T, total de participantes, é múltiplo de
a) 7
b) 11
c) 17
d) 19

2) Uma costureira foi contratada para confeccionar 160 camisas da turma do 1º ano CPCAR 2015. Nos dois primeiros dias, ela confeccionou $\frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{N}^*)$ do total de camisas. Ela percebeu que se tivesse confeccionado 8 camisas a menos, nesses dois dias, o número de camisas confeccionadas seriam $\frac{1}{x+1}$ do total. Com base nessas informações, marque a alternativa INCORRETA.
a) Se a costureira mantiver o ritmo de trabalho dos dois dias, ela gastará menos de 7 dias para confeccionar todas as camisas.
b) Após os dois dias de trabalho, ainda faltava confeccionar mais de 100 camisas.
c) Nos dois dias de trabalho, a costureira confeccionou um quantidade de camisas que representa um número par.
d) A razão entre o número de camisas confeccionadas nos dois dias e o número de camisas que ainda faltou confeccionar, nessa ordem, é igual a $\frac{1}{3}$.

3) Uma professora de Matemática pediu que seus alunos resolvessem uma equação do segundo grau da forma $x^2 + bx + c = 0$ em que b e $c \in \mathbb{R}$. Mariana copiou o coeficiente "c" errado, obtendo $-\frac{1}{2}$ e 4 como raízes. Maria Clara copiou errado o coeficiente "b" e encontrou as raízes 1 e $-\frac{3}{2}$. Sobre a equação proposta pela professora, é correto afirmar que
a) uma das raízes é menor que -1.
b) possui duas raízes inteiras e distintas.
c) uma das raízes é maior que 3.
d) não possui raízes reais.

4) Considere os dados abaixo para resolver essa questão.

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \qquad \text{sen}\,120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

O octógono regular tem lado medindo 1 m (figura I).

Na figura I, quatro vértices não consecutivos deslizam sobre diagonais que passam pelo centro formando um novo polígono equilátero, figura II, cuja área é, em m^2, igual a

a) $\dfrac{6+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

b) $\dfrac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

c) $\dfrac{6-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

d) $\dfrac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$

5) Analise cada afirmativa abaixo e classifique-a em (V) verdadeira ou (F) falsa.

( ) Se x, y e z são números reais distintos entre si, o valor de $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$ é zero.

( ) Se $p \in \mathbb{R}^*$, $q \in \mathbb{R}^*$ e $p \neq \pm q$, então, ao simplificar $\left[\dfrac{p^2+pq}{p^2-q^2}\cdot\left(\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}\right)\right]^{-1}$, obtém-se q.

( ) Se $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_-^*$, $z \in \mathbb{R}^*$, então $\dfrac{x^7y^5}{z^{30}} < 0$.

A sequência correta é
a) V – V – V
b) V – F – V
c) F – F – V
d) V – V – F

6) Considere $p \in \mathbb{R}_+^*$ e a equação $\sqrt{x-p}-\sqrt{p}+\sqrt{2x-p}=0$ na variável x. Sobre o conjunto solução dessa equação, pode-se afirmar que
a) possui um único elemento positivo.
b) não possui elemento.
c) possui dois elementos positivos.

d) possui dois elementos de sinais opostos.

7) Numa corrida utiliza-se uma pista com 4 raias. Essa pista é composta por semicircunferências e trechos retilíneos, como mostra a figura abaixo.

Sabe-se que o comprimento de cada trecho retilíneo da pista e de cada semicircunferência da raia interna (QR e SP) é 100 metros e que a largura de cada raia é de 1 metro. Se cada atleta, A_1, A_2, A_3 e A_4, deve dar uma volta no sentido anti-horário, correndo sobre as linhas em que estão posicionados, com chegada na linha BQ, pode-se afirmar então que, quando ainda na posição de largada, o atleta A_4 deverá estar à frente do atleta A_1

a) 6π metros.
b) 8π metros.
c) 10π metros.
d) 12π metros.

8) Analise as afirmativas seguintes e classifique cada uma em (V) verdadeira ou (F) falsa.

I. Se $A = \dfrac{5 - 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5 - 5^{\frac{1}{2}}}$, então $A \in \{(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Z})\}$.

II. O valor da expressão $\left[\dfrac{(0,001)^4 \cdot 100^7}{10^5}\right] \cdot (0,1)^{-4}$ é $100^{\frac{1}{2}}$.

III. Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, uma forma simplificada para a expressão $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ é a^{-4}.

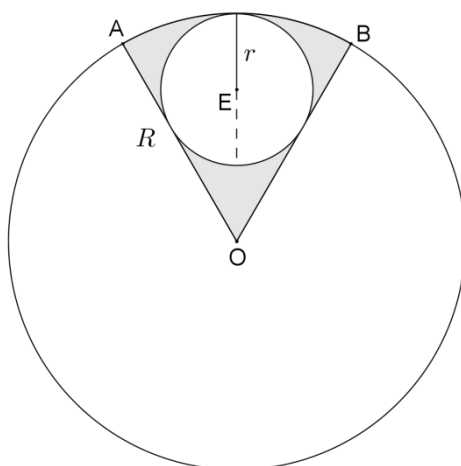
A sequência correta é
a) V – V – V
b) V – V – F
c) V – F – F
d) F – V – F

9) Bhaskara vende bolos na feira. Num certo dia, ele atendeu três fregueses somente. Euler, o primeiro freguês, comprou, do total de bolos da banca, metade dos bolos mais meio bolo. Tales, o segundo freguês, também comprou do total de bolos, que havia na banca, metade dos bolos mais meio bolo. Por fim, Cartesiano, o terceiro freguês, também comprou do total de bolos, que havia na banca, metade dos bolos mais meio bolo. Sabendo-se que, nesse dia, sobraram 10 bolos na banca de Bhaskara, e que cada bolo foi vendido por R$ 6,00, então
a) Bhaskara, com a venda de bolos, recebeu mais de 500 reais.
b) Tales gastou com os bolos a metade do que Cartesiano gastou.
c) Após Euler comprar os bolos, sobraram na banca menos de 40 bolos.
d) A soma da quantidade de bolos comprados por Euler e Cartesiano, juntos, é um número divisível por 5.

10) Numa fábrica de sucos há três reservatórios R_1, R_2 e R_3. O reservatório R_3 comporta $\frac{3}{2}$ da capacidade de R_1 e R_2 juntos. Os reservatórios R_1 e R_2 estão cheios de uma mistura de suco concentrado de uvas e de água. A razão entre o volume de suco concentrado de uvas e o volume de água no reservatório R_1 é 8 para 1 e no reservatório R_2 é 10 para 1. As misturas dos dois reservatórios R_1 e R_2 serão despejadas no reservatório R_3. Com base nessas informações, analise as afirmativas abaixo.
I. A razão do volume de suco concentrado de uvas para o de água no reservatório R_3 é $\frac{87}{10}$.
II. Se em R_1 há 20 litros de água e em R_2 há 22 litros de água, então a capacidade de R_3 é menor que 600 litros.
III. Na mistura do reservatório R_3 haverá menos de 11% de água.
São FALSAS
a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) I, II e III.

11) Um escritório de engenharia foi contratado para desenhar um projeto de construção de uma praça. Para a execução do projeto, deverão ser atendidas as seguintes condições:
• a praça será em forma de um triângulo escaleno;
• as medidas dos lados da praça são números inteiros;
• a medida do maior lado é o dobro da medida do menor lado;
• o perímetro da praça é 120 metros.
O número de projetos que poderão ser executados, atendendo às condições acima, é x.
O número x é
a) múltiplo de 7.
b) primo maior que 3.
c) divisor de 27.
d) quadrado perfeito menor que 20.

12) Considere a figura abaixo em que:

- a circunferência de raio R e centro O e a circunferência de raio r e centro E são tangentes interiores;
- a circunferência de raio r é tangente aos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$;
- $r = 5\text{ cm}$ e $\text{med}(A\hat{O}B) = 60^\circ$

A área da região sombreada nessa figura é $\frac{a}{b}\pi\text{ cm}^2$. Se a e b são primos entre si, então $(a-b)$ é igual a

a) 23
b) 22
c) 21
d) 20

13) Uma das provas de uma gincana consiste numa corrida realizada segundo o percurso descrito na figura abaixo.

Um atleta parte do ponto A, perfazendo 8 km em direção ao ponto B que está sobre a circunferência de centro O e raio 6 km, percorrendo-a uma vez. Chegando novamente em B, segue em direção ao ponto C e, finalmente, vai em direção ao ponto A.

Sabendo-se que $\overline{AB}$ é tangente à circunferência e considerando $\pi = 3{,}14$, pode-se afirmar que, o percurso dessa prova, em quilômetros, está compreendido entre

a) 56 e 57.
b) 57 e 58.
c) 58 e 59.
d) 59 e 60.

14) Um professor de Matemática, querendo incentivar o estudo da geometria, propôs uma lista com uma quantidade de problemas igual a $0,\overline{6}$ de $\frac{1}{5}$ de 210. O professor combinou que, ao primeiro aluno que devolvesse a lista resolvida, seriam ofertados 4 chocolates por problema acertado, mas seriam recolhidos 3 chocolates por problema errado. O primeiro aluno que entregou a lista de problemas resolvidos, após realizada a correção, ficou com 7 chocolates. Esse aluno errou y problemas. O número de divisores naturais de y é

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8

15) Uma pessoa possui a quantia de x reais e pretende comprar um sítio. O valor x corresponde a 30% do valor do sítio. Se essa pessoa vender o apartamento em que atualmente reside e juntar ao valor x, ela conseguirá pagar o sítio e, ainda, lhe sobrarão R$ 15.000,00. Até que seja efetuada a venda do apartamento que reside, essa pessoa conseguiu com um amigo um empréstimo, sem juros, de R$ 60.000,00. Assim, juntos os x reais com os R$ 60.000,00 e efetuou parte do pagamento, ficando devendo $\frac{2}{5}$ do valor todas do sítio. Com base nessas informações, marque a alternativa FALSA.

a) O valor do sítio é maior que R$ 180.000,00.
b) Com a quantia x pode-se comprar um carro cujo valor é R$ 55.000,00 e ainda sobra dinheiro.
c) A quantia de x reais mais os R$ 60.000,00 de empréstimo somam menos de R$130.000,00.
d) O valor do apartamento onde a pessoa reside corresponde a $\frac{3}{4}$ do valor do sítio.

16) Fábio, um adolescente que gosta da disciplina de matemática, usou seus conhecimentos de geometria plana e funções e projetou um brinquedo, conforme modelo matemático descrito abaixo. Nesse brinquedo lançam-se bolinhas a partir do ponto P, em direção ao ponto U. Quando a bolinha alcança o ponto U, ela cai para dentro de um cano.

• PQ representa $\frac{1}{4}$ de circunferência cujo raio mede 30 cm;

• QT representa uma semicircunferência de centro em R e cujo raio mede 20 cm;

• a trajetória de T até V representa um arco de parábola cujo eixo de simetria é OW;

• o solo e o eixo de simetria correspondem, respectivamente, aos eixos $\overleftrightarrow{Ox}$ e $\overleftrightarrow{Oy}$ do sistema cartesiano ortogonal;

• $\overline{VA} = \overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{UV} = 10 \text{ cm}$;

• $\overline{UV}$ é paralelo ao solo;

• $\overline{AW} = \overline{ON} = 10 \text{ cm}$;

• a distância de Z ao eixo de simetria é 5 cm; e

• considere $\pi = 3$.

Com base em todas as informações acima, analise as afirmativas, classificando-as em (V) verdadeira ou (F) falsa.

( ) Após um lançamento, quando a bolinha estiver no ponto Z, ela estará a mais de 37 cm do solo.
( ) De Q até S, a bolinha percorre exatamente 20 cm.
( ) Após um lançamento, se a bolinha está sobre o arco de parábola a 38,4 cm do solo, então também estará a exatamente 4 cm do eixo de simetria.

A sequência correta é

a) F – F – V
b) V – F – F
c) V – V – F
d) V – F – V

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2013/2014

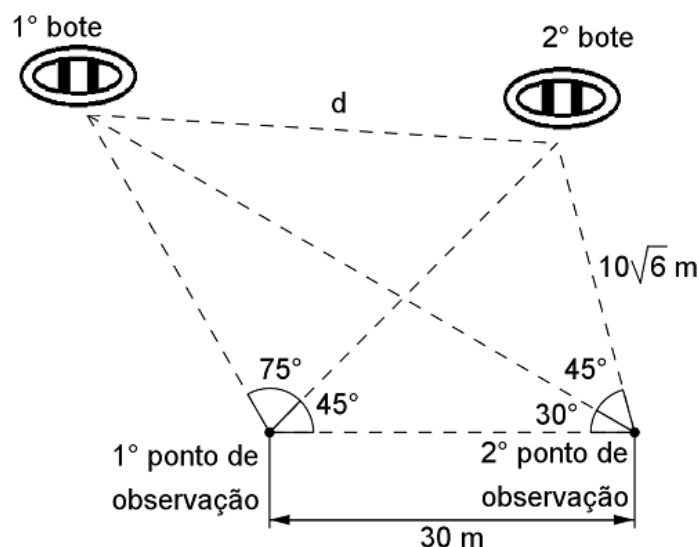
1) Há dois anos Letícia tinha $\frac{1}{6}$ da idade que seu pai tem hoje. Daqui a um ano Letícia terá $\frac{1}{4}$ da idade atual de sua mãe. Hoje a soma das idades dos três é igual ao menor número natural de três algarismos distintos divisível por 3. Os irmãos gêmeos de Letícia têm hoje a metade da idade que Letícia terá daqui a oito anos. Atualmente, a soma das idades dos três irmãos é
a) 24
b) 26
c) 28
d) 30

2) Considere as expressões abaixo em que $a \neq b$

$$P = \frac{a^3 - b^3}{a^2\sqrt{a} - \sqrt{b}\,a^2 + ba\sqrt{a} - b\sqrt{b}\,a + b^2\sqrt{a} - b^2\sqrt{b}}$$

$$Q = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$$

Assim, tem-se $\frac{Q}{P}$ igual a
a) $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
d) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

3) Dois botes estão no mar a uma distância d um do outro. Um observador, situado na praia, observava-os, calculando distâncias e ângulos em dois pontos de observação, como no esboço abaixo.

A distância d entre os botes, em metros, é igual a

Dado: $\text{sen}\,120^\circ = \cos 30^\circ$
a) $10\sqrt{15}$
b) $15\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$
c) $10\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$
d) $15\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

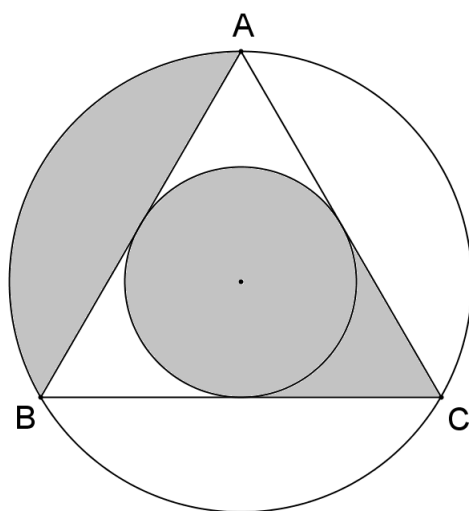
4) Leila foi avisada em dezembro de 2012, que a mensalidade escolar de seus filhos para o ano de 2013 teria um aumento de 80%.
Ela não concordou com o aumento e procurou o PROCON que, após analisar o caso, determinou que a escola reduzisse este último valor em 30%.
A escola acatou a decisão do PROCON. Além disso, como Leila tem 3 filhos matriculados, a escola decidiu lhe dar 10% de desconto nas mensalidades de cada um de seus filhos.
Dessa forma, o aumento da mensalidade escolar dos filhos de Leila do ano de 2012 para o ano de 2013 passou a ser, em percentual, um número compreendido entre
a) 10 e 13
b) 13 e 16
c) 16 e 19
d) 19 e 22

5) Uma confecção de roupas foi contratada para confeccionar os agasalhos de todos os alunos do 1° ano CPCAR para o ano de 2014.
O prazo que a confecção teve para a execução do trabalho foi de 4 dias. Para isso, o gerente da confecção utilizou 6 máquinas tipo α, cada uma trabalhando 6 horas por dia e todas com a mesma produtividade.
Ao final do terceiro dia, o gerente da fábrica verificou que somente $0,\overline{3}$ de $\frac{9}{4}$ dos agasalhos estavam prontos.
Sendo assim, substituiu, no início do quarto dia, as máquinas do tipo α por 3 outras do tipo β, cada uma trabalhando 8 horas por dia, e cada uma delas com o triplo da produtividade de uma máquina tipo α.
Se as 3 máquinas tipo β tivessem sido utilizadas desde o início, o serviço teria sido realizado em
a) 20 horas
b) 16 horas
c) 12 horas
d) 10 horas

6) Três pessoas, X, Y e Z, tinham a mesma quantia em reais.
X, de início, gastou 99 reais. Y deu uma parte de sua quantia para Z, e o dobro dessa parte, para X.
Com essas novas quantias em reais, as três pessoas saíram para as compras e X gastou o quadrado da diferença entre 4 reais e o que Y havia dado para Z.
Y e Z gastaram, cada uma, a diferença entre o quadrado do que Y havia dado a Z e 4 reais.
Após esses gastos, a soma das quantias de X e Z era igual ao dobro da de Y.
É correto afirmar que X gastou no total, em reais.
a) 90
b) 99
c) 108

d) 118

7) O número de alunos do CPCAR que se inscreveu para um desafio de matemática na EPCAR, realizado anualmente, foi, nos anos de 2009, 2010 e 2012, respectivamente igual a 5, 6 e 20.
Os professores da EPCAR perceberam que o número de alunos que se inscreveu para esse desafio cresceu, de maneira que a diferença entre o número de alunos dos anos $(x+2)$ e x é diretamente proporcional ao número de alunos do ano $(x+1)$.
Se y é o número de alunos do CPCAR que se inscreveu nesse desafio em 2011, então a soma dos divisores naturais de y é
a) 28
b) 26
c) 24
d) 20

8) Considere o triângulo ABC, inscrito na circunferência de centro O abaixo, em que os menores arcos AB, BC e AC são congruentes.

Se a circunferência menor, inscrita ao triângulo ABC, tem raio igual a 1 cm, então o número que representa a área sombreada, em cm^2, é igual ao número que representa
a) o comprimento do círculo menor, em cm.
b) a área do círculo maior, em cm^2.
c) o comprimento do círculo maior, em cm.
d) o dobro da área do triângulo ABC, em cm^2.

9) Considere os números p, q e r abaixo:

$$p=\frac{\sqrt{180}+2\sqrt{20}-2\sqrt{605}}{4\sqrt{80}-\sqrt{500}}$$

$$q=\left[\left(9^{0,\bar{6}}\right)^{0,5}\right]^{-3}$$

$$r = 0,\overline{18} \cdot \left(\frac{\sqrt{0,25} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 225^{0,5}} \right)$$

Se x é o número obtido pelo produto entre p, q e r, então x é um número
a) irracional positivo.
b) irracional negativo.
c) racional negativo.
d) racional positivo.

10) Um ônibus percorre, na estrada, 9 km com 1 litro de combustível.
O motorista desse ônibus realizou uma viagem de 551 km.
Ao sair do local de origem da viagem, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicava $\frac{6}{8}$ do tanque.
Após o motorista percorrer 225 km, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicou $\frac{1}{2}$ tanque.
Com base nessa situação, é correto afirmar que, ao chegar ao destino proposto, a quantidade de combustível restante no tanque do ônibus estava entre
a) 11 e 12 litros.
b) 12 e 13 litros.
c) 13 e 14 litros.
d) 14 e 15 litros.

11) Uma escola tem 10 salas de aula. Em todas elas cada uma das quatro paredes mede 500 cm de comprimento e 0,3 dam de altura.
Deseja-se pintar as paredes dessas salas com tinta branca e para isso foram comprados galões de 36 $d\ell$ por R$ 54,00 cada um.
O pintor calculou que, para pintar cada 12 m^2 de parede, gastará 3 ℓ dessa tinta e um tempo de 24 minutos.
Sabe-se que ele cobra R$ 20,00 por hora trabalhada.
Com base nessas informações, é correto afirmar que
a) serão necessários mais de 41 galões de 3,6 ℓ para essa pintura.
b) para pintar todas as paredes serão gastos menos de R$ 2.000,00 com tinta.
c) serão necessárias apenas 18 horas de trabalho para pintar as 10 salas de aula.
d) o pintor receberá, em reais, ao final da pintura, o valor equivalente ao de 8 galões de tinta.

12) Fernando, um aluno aplicado em Matemática, propôs a seus colegas o desafio de descobrirem os coeficienttes e as raízes de três equações do 2º grau, todas da forma $ax^2 + bx + c = 0$.
Ele afirmou que:
• Os coeficientes dos termos de maiores graus da 2ª e da 3ª equações são iguais ao menor número inteiro positivo.
• O conjunto solução da 1ª equação é $\{-1, -2\}$ e a 2ª equação possui duas raízes reais e iguais a 3.
• O coeficiente do termo de maior grau da 1ª equação é igual ao oposto do coeficiente de maior grau da 3ª equação.
• O coeficiente de x da 3ª equação é a metade do coeficiente de x da 2ª equação.

• O produto das raízes da 3ª equação é igual à unidade.
Com base nesses dados, marque a alternativa **FALSA**.
a) A soma dos coeficientes da 1ª equação é um número que pode ser escrito como 2k, tal que $k \in \mathbb{Z}$.
b) A soma das raízes das três equações é igual ao oposto do coeficiente de x da 2ª equação.
c) A razão entre o termo independente de x da 3ª equação e o termo independente de x da 1ª equação é um número do conjunto $\mathbb{Q}_-$.
d) A diferença entre as raízes da 3ª equação é um número racional.

13) Considere um quadrado ABCD de lado m. Seja P o ponto do lado AB tal que $\overline{DP} = \overline{CB} + \overline{BP}$.
A área do trapézio DCBP é x% da área do quadrado ABCD.
O número x está compreendido entre
a) 60 e 62
b) 62 e 64
c) 64 e 66
d) 66 e 68

14) Um parque está sendo construído na cidade de Barbacena. Através das alamedas 1 e 2 do parque, que são paralelas, serão construídos dois muros retilíneos, a partir dos pontos E e R, passando pelos pontos P e A, e esses muros se encontrarão no ponto C, conforme figura.

Sabe-se que
• $\overline{EP} = 1\text{ km}$
• $\overline{RA} = 1,5\text{ km}$
• São construídos 12 m de cada muro, por dia.
• O muro 1 será totalmente construído em 250 dias.
• As obras das construções dos muros 1 e 2 terminarão no mesmo dia.
Se a obra do muro 1 se iniciou dia 1º de agosto de 2013, e sabendo ainda que as obras dos dois muros foram realizadas em dias consecutivos (ou seja, não houve dia de folga em nenhuma das obras), então a obra do muro 2 teve início dia
a) 31 de março de 2013.
b) 30 de março de 2013.
c) 29 de março de 2013.
d) 28 de março de 2013.

15) A tabela e os gráficos abaixo são referentes aos candidatos do Concurso CPCAR 2012.

Distribuição por região do Brasil

	Realizaram concurso		Aprovados no concurso	
	Nº de candidatos	%	Nº de candidatos	%
Norte	477	5,4	33	4,2
Nordeste	710	8,0	59	7,2
Centro-oeste	554	6,3	39	4,8
Sudeste	6605	74,8	659	80
Sul	482	5,5	31	3,8
Total	8828	100	821	100

Procedência escolar dos aprovados

Motivação dos aprovados pela carreira

Analisando as informações acima, afirma-se sobre o Concurso CPCAR 2012:
I. Os candidatos da região Sudeste, além do maior número na realização do concurso, também tiveram maior percentual entre os aprovados.
II. Dentre os aprovados que vieram de Escola Pública Estadual, é possível não haver nenhum da Região Sudeste.
III. Dentre os aprovados que não foram motivados pelo ensino oferecido, é possível que só haja candidatos vindos da Região Sudeste.
Julgue cada afirmativa em (V) verdadeira ou (F) falsa e marque a alternativa que contém a sequência correta.
a) V – V – V
b) V – F – F
c) F – F – V
d) V – F – V

16) Gustavo está brincando com seu skate de dedo numa pista que foi projetada segundo uma modelagem matemática descrita a seguir.

- A pista está sobre o tampo de uma mesa apoiada no solo.
- O tampo da mesa e o eixo de simetria da curva, indicados no desenho, coincidem com os eixos $\overleftrightarrow{Ox}$ e $\overleftrightarrow{Oy}$, respectivamente, do sistema cartesiano ortogonal.
- O ponto O é a origem do sistema cartesiano ortogonal.
- A e B são pontos que pertencem a uma reta paralela ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$.
- C e D são pontos que pertencem a uma reta paralela à reta AB e distante desta 288 mm.
- A curva da pista de B até C coincide com um arco de parábola.
- A distância de C ao eixo de simetria da parábola é 40 mm.
- O ponto R, que é o mais baixo do arco de parábola, está a 150 mm do ponto O.
- $\overline{AB} = 400$ mm

Durante a execução de uma manobra, o skate passa por um ponto P, da parábola, que possui ordenada a 450 mm do ponto R e que está a 30 mm do eixo de simetria.

Assim, pode-se afirmar que a distância do ponto A ao eixo de simetria é, em milímetros, um número compreendido entre

a) 400 e 430

b) 430 e 460

c) 460 e 490

d) 490 e 520

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2012/2013

1) O oposto do número real $x = \frac{526}{495} + \left[\frac{\left((-2)^{(2\sqrt{2}-1)}\right)^{(2\sqrt{2}+1)}}{128} \right]^{-1}$ está compreendido entre

a) $-0,061$ e $-0,06$
b) $-0,062$ e $-0,061$
c) $-0,063$ e $-0,062$
d) $-0,064$ e $-0,063$

2) A equação $x = \sqrt{3x + a^2 + 3a}$, em que x é a incógnita e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < -3$, possui conjunto solução S, $S \subset \mathbb{R}$. Sobre S tem-se as seguintes proposições:
I) Possui exatamente dois elementos.
II) Não possui elemento menor que 2.
III) Possui elemento maior que 3.
Sobre as proposições acima, são verdadeiras
a) apenas I e II.
b) apenas I e III.
c) apenas II e III.
d) I, II e III.

3) "NASCIDOS PARA VOAR: 60 ANOS DE FUMAÇA JÁ"
Fonte: Jornal EPCARIANO – Ano 1, n° 1 – p. 4

Em maio de 2012, o esquadrão EDA (Esquadrilha da Fumaça) comemorou 60 anos de apresentações. Para homenagear esse esquadrão foi realizado na EPCAR um concurso em que os alunos teriam que criar um desenho.
Um das regras desse concurso foi: elaborar um desenho usando conhecimentos de matemática.
O aluno vencedor apresentou o desenho em circunferências conforme esquema abaixo.

Com base nas informações do desenho, julgue verdadeira ou falsa cada afirmativa.
(02) A menor soma das medidas dos comprimentos dos arcos PS, GH, FK, e LM é igual a 6π.
(04) A razão entre $\overline{PS}$ e $\overline{ST}$, nessa ordem, é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
(08) $\overline{PS}$ e $\overline{GH}$ são congruentes.

(16) $\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{EJ}$

(32) $\overline{ST} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

A soma das alternativas verdadeiras é igual a
a) 20
b) 22
c) 36
d) 44

4) Uma professora de Matemática do 5° ano do Ensino Fundamental, para dar início a um conteúdo novo, levou para a sala de aula p bolinhas em uma única caixa.
Ela chamou os alunos α, β, γ à frente da turma e pediu a cada aluno que, um de cada vez, fizesse retiradas sucessivas de um mesmo número de bolinhas, conforme descrito no quadro abaixo:

ALUNO	QUANTIDADE DE RETIRADAS	QUANTIDADE DE BOLINHAS RETIRADAS POR VEZ	SOBRA DE BOLINHA NA CAIXA
α	x	2	0
β	y	3	1
γ	z	5	2

Sabe-se que:
I − $40 < p < 80$
II – Cada aluno, logo após a contagem das bolinhas por ele retiradas, devolveu todas as bolinhas retiradas.
III – Não houve erro na contagem por parte dos alunos.
Com base nessas informações, é FALSO que
a) $x + y + z > p$
b) x e y são primos entre si.
c) $y < \frac{1}{3}p$
d) $x - z$ é um número ímpar.

5) Hoje, dia 29 de julho de 2012, José tem o dobro da idade que Luiz tinha quando José tinha a idade que Luiz tem. Quando Luiz tiver a idade que José tem, a soma das idades deles será 90 anos.
Em 29 de julho de 2017, a razão entre as idades de José e Luiz, nessa ordem, será
a) $\frac{6}{5}$
b) $\frac{9}{7}$
c) $\frac{5}{4}$
d) $\frac{27}{20}$

6) Considere as expressões abaixo e simplifique-as.

$$A=\frac{\left(x^{2n+1}+x\right)\left(x^{2n+1}-x\right)-\left(x^4\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\left(x^n+x\right)^2-x^{2n}-2x^{n+1}},\ x\neq 0$$

$C=4z^2-3y^2$ dado que $z=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{\sqrt{3}}$, $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2012}$ e $b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{2012}$.

Marque a alternativa verdadeira.

a) É possível determinar o valor de $\frac{C}{4A+C}$.

b) $\sqrt{C}$ é um número irracional.

c) $\left[-(A-C)\right]^{-0,5}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $(A+C)^{-0,\overline{3}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

7) Maria Fernanda utiliza um balde com capacidade igual a 0,028 $h\ell$ para aguar as 16 roseiras de seu jardim. Ela enche o balde, inicialmente vazio, e vai, de roseira em roseira, sem desperdício de água, jogando exatamente 800 cm^3 em cada uma.
Toda vez que o líquido não é suficiente para continuar, Maria Fernanda retorna e completa a capacidade do balde. Ela faz isso até que tenha aguado todas as roseiras.
É correto afirmar que, para Maria Fernanda aguar todas as roseiras,

a) o volume de água que sobra no balde é maior que $\frac{5}{7}$ do total de sua capacidade.
b) o total de água não gasto não chega a 15 ℓ.
c) é necessário encher o balde somente 5 vezes.
d) o volume de água que sobra no balde é menor que 10% do total gasto.

8) Para encher um reservatório com água, pode-se usar duas torneiras. A primeira torneira enche esse reservatório em 36 minutos. A segunda enche o mesmo reservatório em 24 minutos.
Certo dia, em que esse reservatório estava vazio, a primeira torneira é aberta durante um período de k minutos. Ao fim de k minutos, a primeira torneira é fechada e abre-se, imediatamente, a segunda, que fica aberta por um período de $(k+3)$ minutos.
Se o volume de água atingido corresponde a $\frac{2}{3}$ da capacidade do reservatório, então o tempo total gasto foi
a) 31% de hora.
b) 30% de hora.
c) 28% de hora.
d) 27% de hora.

9) Analise as proposições abaixo.

I) Uma jarra cheia de leite pesa 235 dag; com $\frac{3}{4}$ de leite a jarra pesa 19,5 hg. O peso da jarra com $\frac{5}{8}$ de leite é y gramas. A soma dos algarismos de y é igual a 13.

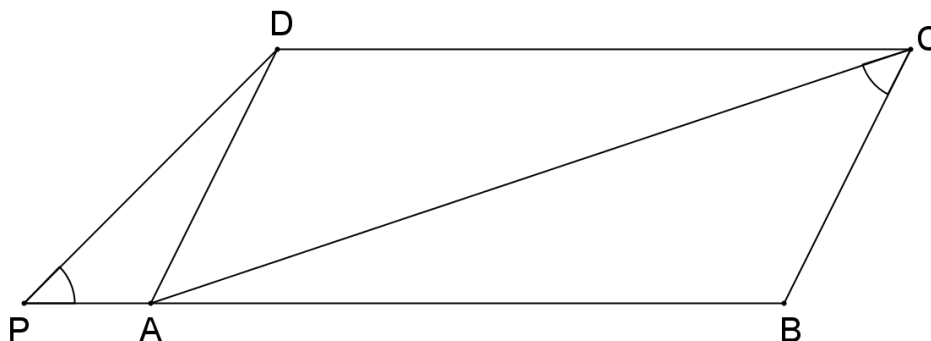
II) Com $\frac{3}{5}$ de $0,\overline{6}$ da metade de uma lata que comporta 20 ℓ de tinta, um pintor consegue pintar uma área de 16 m^2. Para pintar uma área 25% menor, são necessários, 0,003 m^3 de tinta.
III) Um pedreiro prepara uma mistura com 1 kg de cimento e 600 $m\ell$ de água. Em seguida, ele aumenta em 50% a quantidade de cimento e mexe até ficar homogênea a mistura, obtendo 1800 $m\ell$ dessa mistura.
Se a densidade da água é 1 $g/m\ell$, então a densidade do cimento é igual a 1,25 kg/ℓ.
Tem-se que
a) apenas I é verdadeira.
b) apenas II é falsa.
c) apenas I e II são falsas.
d) I, II e III são verdadeiras.

10) "Ensino privatizado
− 78% dos alunos brasileiros estão matriculados em instituições de ensino superior privadas.
− Nos Estados Unidos, o percentual é de 22%."

FONTE: ISTO É – 4/abril/12 – Ano 36, n° 2212 – p.55

Sabendo-se que os gráficos acima se referem ao Brasil, analise as afirmativas abaixo e marque V (verdadeiro) ou F (falso).
( ) O aumento do número de instituições de ensino superior privadas entre os anos 2000 e 2010 foi x%. O número x está compreendido entre 106 e 110.
( ) No período de 2000 a 2010 o crescimento no número de instituições de ensino superior públicas representa mais que a décima parte do crescimento no número de instituições de ensino superior privadas.
( ) No ano de 2010, o número de alunos ingressantes no ensino superior privado representa mais de 360% do número de alunos ingressantes no superior público.
( ) $A - B$ representa mais de 65% de A.
A sequência correta é
a) V – V – F – F
b) V – F – V – F
c) F – V – V – V

d) F – F – F – V

11) Seja ABCD um paralelogramo cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 5 e $\sqrt{10}$. Prolongando o lado $\overline{AB}$ até o ponto P, obtém-se o triângulo APD, cujo ângulo $A\hat{P}D$ é congruente ao ângulo $A\hat{C}B$, conforme a figura.

Então, a medida $\overline{AP}$ é
a) 0,2
b) 2
c) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$
d) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

12) Analise as afirmativas seguintes e classifique-as em V (verdadeiro) ou F (falsa).
( ) Se p é um número inteiro, ímpar e $p > 2$, então o maior valor de x que satisfaz a inequação $-p(x-p) \geq 2(2-x)$ é sempre um número ímpar.
( ) Para todo $m \in \mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $2mx - m(x+1) = 0$ é $S = \{1\}$.
( ) Se a menor raiz da equação (I) $x^2 + (m-1)x - 3m = 0$ e a menor raiz da equação (II) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ são iguais, então m é a outra raiz de (I).
Tem-se a sequência correta em
a) F – F – V
b) V – V – F
c) V – F – V
d) F – V – F

13) Uma empresa foi contratada para executar serviço de pintura no alojamento dos alunos do 1° ano CPCAR. O prazo estabelecido no contrato para a conclusão do serviço foi de 10 dias.
O serviço começou a ser executado por uma equipe de 6 funcionários da empresa, cada um trabalhando 6 horas por dia.
Ao final do 8° dia de serviço somente $\frac{3}{5}$ do serviço de pintura havia sido executado.
Para terminar o serviço dentro do prazo, a equipe de serviço recebeu mais 2 funcionários e todos passaram a trabalhar 9 horas por dia. Com isso a produtividade da equipe duplicou. A nova equipe, para concluir o trabalho, gastou mais de 1 dia, porém menos de 2 dias.

Se h representa o número de horas que cada funcionário da nova equipe trabalhou no 10º dia de trabalho, então h é um número compreendido entre
a) 0 e 2
b) 2 e 4
c) 4 e 6
d) 6 e 8

14) Gabriel aplicou R$ 6.500,00 a juros simples em dois bancos. No banco A, ele aplicou uma parte a 3% ao mês durante $\frac{5}{6}$ de um ano; no banco B, aplicou o restante a 3,5% ao mês, durante $\frac{3}{4}$ de um ano.
O total de juros que recebeu nas duas aplicações foi de R$ 2.002,50.
Com base nessas informações, é correto afirmar que
a) é possível comprar um televisor de R$ 3.100,00 com a quantia aplicada no banco A.
b) o juro recebido com a aplicação no banco A foi menor que R$ 850,00.
c) é possível comprar uma moto de R$ 4.600,00 com a quantia recebida pela aplicação no banco B.
d) o juro recebido com a aplicação no banco B foi maior que R$ 1.110,00.

15) Pitágoras e Tales possuem hoje, cada uma, certa quantia em reais. Se Pitágoras desse para Tales 50 reais, eles ficariam com a mesma quantia em reais, cada um. Porém se Tales desse para Pitágoras 100 reais, Tales passaria a ter $\frac{1}{4}$ da quantia de Pitágoras.
Dessa forma, é correto afirmar que
a) a quantia que os dois possuem hoje, juntos, é menor que 600 reais.
b) Pitágoras possui hoje, $\frac{2}{3}$ do que Tales possui.
c) Tales possui hoje, mais que 220 reais.
d) a diferença entre os valores que eles possuem hoje é menor que 100 reais.

16) Lucas e Mateus são apaixonados por futebol. Eles praticam futebol no quintal de casa, que é totalmente plano e possui uma rede de 3 m de altura.

Numa brincadeira, Mateus posiciona a bola a 4 m da rede e Lucas varia sua posição em lado oposto à rede, aproximando-se ou afastando-se dela, conservando uma mesma linha reta com a bola, perpendicular à rede.
Mateus lança a bola para Lucas, com um único toque na bola, até que ela atinja o chão, sem tocar a rede.

Considere um plano cartesiano em que:

- cada lançamento realizado por Mateus é descrito por uma trajetória parabólica;
- Lucas e o ponto de partida da bola estão no eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ e
- a posição da bola é um ponto (x, y) desse plano, onde $y = f(x)$ é a altura atingida pela bola, em metros, em relação ao chão.

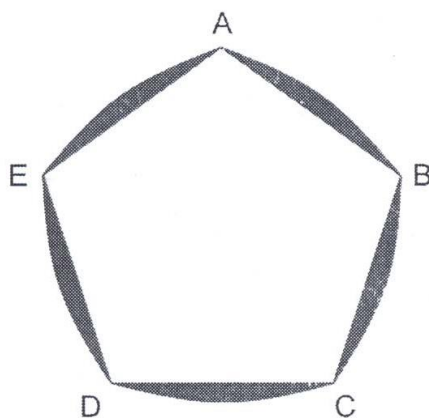
Assinale, dentre as alternativas abaixo, aquela que tem a lei de uma função f que satisfaz às condições estabelecidas na brincadeira de Lucas e Mateus.

a) $f(x) = -\frac{x^2}{8} + 2$

b) $f(x) = -\frac{3x^2}{16} + 3$

c) $f(x) = -\frac{x^2}{16} + \frac{x+15}{4}$

d) $f(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}2x + 4{,}8$

17) Na figura abaixo, ABCDE é um pentágono regular de lado a e $AB = BC = CD = DE = EA$ são arcos de circunferência cujo raio mede a.

Assim, a área hachurada nessa figura, em função de a, é igual a

a) $\frac{5a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $5a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\frac{a^2}{4}\left(4\pi - 5\sqrt{3}\right)$

d) $a^2\left(4\pi - 5\sqrt{3}\right)$

18) Uma mãe dividiu a quantia de R$ 2.100,00 entre seus três filhos de 3, 5 e 6 anos. A divisão foi feita em partes inversamente proporcionais às idades de cada um.

Dessa forma, é verdade que

a) o filho mais novo recebeu 100 reais a mais que a soma dos valores recebidos pelos outros dois filhos.

b) o filho mais velho recebeu 20% a menos que o filho do meio.

c) a quantia que o filho do meio recebeu é 40% do que recebeu o mais novo.

d) se a divisão fosse feita em partes iguais, o filho mais velho teria sua parte acrescida de 40% em relação ao que realmente recebeu.

19) Samuel possui 12 palitos iguais e resolveu formar um único triângulo por vez, usando os 12 palitos sem parti-los.
Ele verificou que é possível formar x triângulos retângulos, y triângulos isósceles, z triângulos equiláteros e w triângulos escalenos.
A soma $x+y+z+w$ é igual a
a) 7
b) 6
c) 5
d) 4

20) Uma fábrica vende por mês 30 camisas ao preço de 25 reais cada. O custo total de cada camisa para a fábrica é de R$ 10,00.
O gerente da fábrica observou que, a cada redução de R$ 0,50 no preço unitário de cada camisa, são vendidas 5 camisas a mais.
Considerando essas observações, se a fábrica vender 150 camisas, o lucro obtido na venda de cada camisa é de y%.
O número de divisores naturais de y é
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2011/2012

1) Mateus ganhou 100 g de “bala de goma”. Ele come a mesma quantidade de balas a cada segundo. Ao final de 40 minutos ele terminou de comer todas as balas que ganhou. Lucas ganhou 60 g de “bala delícia”, e come a mesma quantidade de balas a cada segundo. Ao final de 1 hora, ele terminou de comer todas as balas. Considere que eles começaram a comer ao mesmo tempo.
Com base nessa situação, é **FALSO** afirmar que

a) ao final de 26 minutos e 40 segundos Lucas e Mateus estavam com $\frac{100}{3}$ g de balas cada um.
b) em 30 minutos Mateus comeu 75 g de balas.
c) quando Mateus terminou de comer as balas Lucas ainda tinha 25 g de balas.
d) ao final de 30 minutos Lucas ainda tinha 30 g de balas.

2) Considere a área S da parte sombreada no triângulo retângulo isósceles OO_1O_2.

AD, AB e BC são arcos de circunferência com centro em O_2, O e O_1, respectivamente, cujos raios medem 2r.
Das figuras abaixo, a única em que a área sombreada **NÃO** é igual a S, é

a)

Circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e semicircunferências de diâmetros $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.

b)

Circunferência de centro O.

c)

Circunferência de centro O.

d)

Circunferência de centro O inscrita num quadrado.
Dois setores circulares de raio r.

3) Sobre a equação $kx - \frac{x-1}{k} = 1$, na variável x, é correto afirmar que

a) admite solução única se $k^2 \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}^*$.
b) NÃO admite solução se $k = 1$.
c) admite mais de uma solução se $k = -1$.
d) admite infinitas soluções se $k = 0$.

4) Considere os algarismos zero e 4 e os números formados apenas com os mesmos. O número x representa o menor múltiplo positivo de 15, dentre os descritos acima.

Se $\frac{x}{30}$ possui um número α de divisores positivos, então α é igual a

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10

5) A quantidade de suco existente na cantina de uma escola é suficiente para atender o consumo de 30 crianças durante 30 dias. Sabe-se que cada criança consome, por dia, a mesma quantidade de suco que qualquer outra criança desta escola. Passados 18 dias, 6 crianças tiveram que se ausentar desta escola por motivo de saúde.
É correto afirmar que, se não houver mais ausências nem retornos, a quantidade de suco restante atenderá o grupo remanescente por um período de tempo que somado aos 18 dias já passados, ultrapassa os 30 dias inicialmente previstos em
a) 10%
b) 20%
c) 5%
d) 15%

6) Considere os números reais

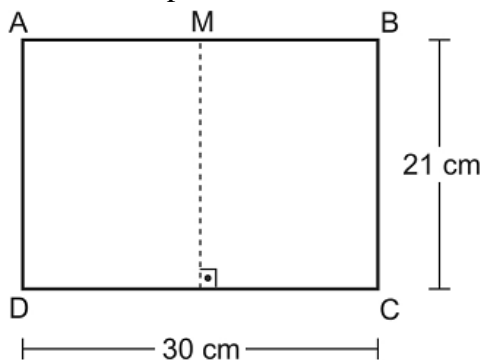
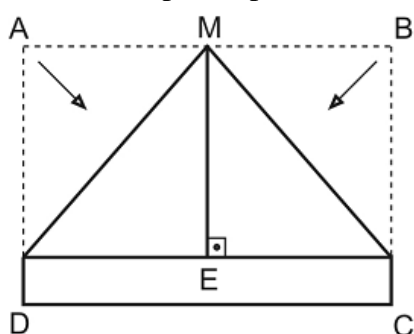
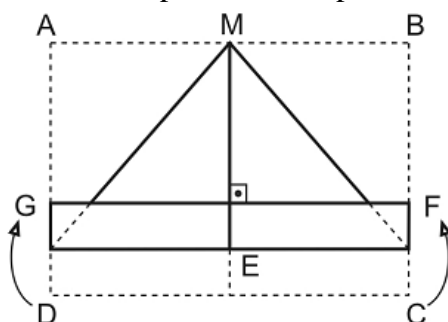
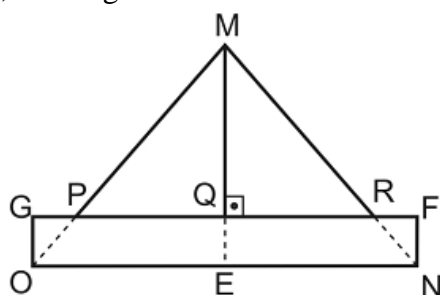
$$x = \sqrt{2,\overline{7}}$$

$$y = \left(\sqrt{0,25} + 16^{-\frac{3}{4}}\right)^{-1}$$

$$z = \frac{\left(-2^2\right)^{2^3} - \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{3^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}}}}{-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}\right]^2}$$

É **FALSO** afirmar que
a) $\frac{z}{y} < -\frac{3}{2}$
b) $x - y < \frac{1}{5}$
c) $x + z < 0$
d) $x + y + z \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

7) O conjunto solução da equação $-x + \sqrt{7 + \frac{x}{2}} = -14$ está contido em
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 18\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 17 < x < 25\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 24 < x < 32\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 31 < x < 39\}$

8) Brincando de dobraduras, Renan usou uma folha retangular de dimensões 30 cm por 21 cm e dobrou conforme o procedimento abaixo descrito.
1°) Tracejou na metade da folha e marcou o ponto M.

2°) Dobrou a folha movendo os pontos A e B para o ponto E.

3°) Em seguida, dobrou a folha movendo os pontos C e D para F e G, respectivamente.

4°) Marcou os pontos N, O, P, Q, R na figura resultante.

Segundo esses procedimentos, pode-se afirmar que a medida do segmento $\overline{MR}$, em centímetros, é igual a
a) 6
b) $6\sqrt{2}$
c) 9

d) $9\sqrt{2}$

9) Um líquido L_1 de densidade 800 g/ℓ será misturado a um líquido L_2 de densidade 900 g/ℓ. Tal mistura será homogênea e terá a proporção de 3 partes de L_1 para cada 5 partes de L_2. A densidade da mistura final, em g/ℓ, será
a) 861,5
b) 862
c) 862,5
d) 863

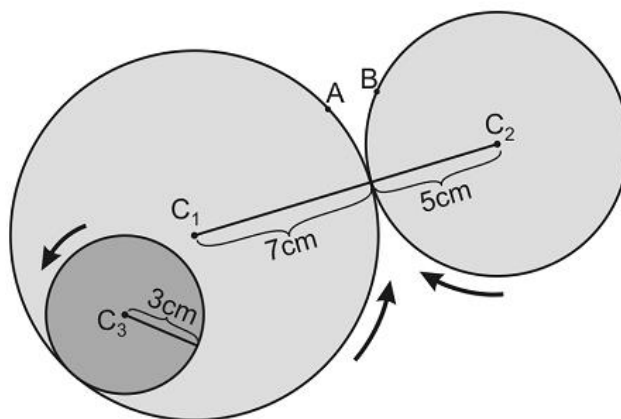
10) Em um prédio de 90 andares, numerados de 1 a 90, sem contar o térreo, existem 4 elevadores que são programados para atender apenas determinados andares. Assim, o elevador
O para nos andares múltiplos de 11;
S para nos andares múltiplos de 7;
C para nos andares múltiplos de 5; e
T para em todos os andares.
Todos esses elevadores partem do andar térreo e funcionam perfeitamente de acordo com sua programação.
Analise as afirmativas abaixo, classificando cada uma em V (verdadeira) ou F (falsa).
( ) No último andar para apenas 1 elevador.
( ) Não há neste prédio um andar em que parem todos os elevadores, com exceção do próprio térreo.
( ) Existem, neste prédio, 4 andares em que param 3 elevadores, com exceção do próprio térreo.
Tem-se a sequência correta em
a) F – V – V
b) F – V – F
c) V – F – V
d) F – F – V

11) Na festa junina do Bairro Jardim foi montada uma barraca que vende pasteis e suco. Sabe-se que cada pastel teve um custo de R$ 0,50 e o suco já preparado para o consumo foi comprado em garrafas de $600\ m\ell$ por R$ 1,20 cada.
O proprietário resolveu vender o suco em copos de $250\ m\ell$ ao preço de 2 reais cada copo e um pastel era oferecido em cortesia para cada copo de suco consumido.
Ao final da festa, foram consumidas nessa barraca todas as 100 garrafas de suco que o proprietário havia adquirido e todos os clientes aceitaram a cortesia e não sobrou nenhum pastel.
É correto afirmar que, se não houve outras despesas, e o proprietário dessa barraca teve um lucro x relativo somente à venda dos sucos com suas cortesias, então a soma dos algarismos de x é igual a
a) 3
b) 6
c) 9
d) 13

12) Sr. Luiz pretende dividir a quantia x reais entre seus netos. Observou que se der 50 reais para cada um lhe faltarão 50 reais e se der 40 reais para cada um, lhe sobrarão 40 reais. Com base nisso, é correto afirmar que
a) Sr. Luiz possui menos de 500 reais para dividir entre seus netos.

b) Sr. Luiz tem mais de 10 netos.
c) se um dos netos do Sr. Luiz não quiser o dinheiro, os demais receberão menos de 45 reais cada um.
d) é possível que o Sr. Luiz divida a quantia x em partes iguais entre todos os seus netos, de forma que não lhe sobre nenhum centavo.

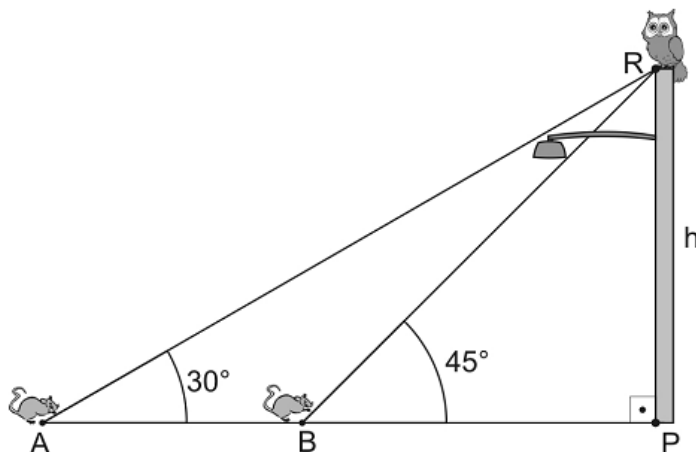
13) Uma pessoa foi realizar um curso de aperfeiçoamento. O curso foi ministrado em x dias nos períodos da manhã e da tarde desses dias. Durante o curso foram aplicadas 9 avaliações que ocorreram em dias distintos, cada uma no período da tarde ou no período da manhã, nunca havendo mais de uma avaliação no mesmo dia. Houve 7 manhãs e 4 tardes sem avaliação. O número x é divisor natural de
a) 45
b) 36
c) 20
d) 18

14) Os círculos abaixo têm centros fixos em C_1, C_2, C_3 e se tangenciam conforme a figura. Eles giram conforme a direção das setas, e não derrapam nos pontos de contato. Num certo momento, os pontos A e B das circunferências de centros C_1 e C_2 se encontram no ponto de tangência. A partir desse momento até A e B se encontrarem novamente, o número de voltas dadas pelo círculo de centro em C_3 é

a) 11
b) $11\frac{1}{3}$
c) $11\frac{2}{3}$
d) 12

15) Sr. José tinha uma quantia x em dinheiro e aplicou tudo a juros simples de 5% ao ano. Terminado o primeiro ano, reuniu o capital aplicado e os juros e gastou $\frac{1}{3}$ na compra de material para construção de sua casa. O restante do dinheiro investiu em duas aplicações: colocou $\frac{5}{7}$ a juros simples de 6% ao ano e o que sobrou a juros simples de 5% ao ano, recebendo assim, 700 reais de juros relativos a esse segundo ano. Pode-se afirmar, então que a quantia x que o Sr. José tinha é um número cuja soma dos algarismos é
a) 10

b) 11
c) 12
d) 13

16) Um reservatório d'água na forma de um paralelepípedo reto de base quadrada e cuja altura é metade do lado da base, está com 80% de sua capacidade máxima ocupada. Se fosse preciso acabar de encher este reservatório seriam necessários 500 baldes iguais cheios d'água com capacidade de $12800\,\text{m}\ell$ cada. Com base nesses dados, é correto afirmar que a altura da água que há neste reservatório
a) é exatamente 15 dm.
b) é exatamente 1600 mm.
c) NÃO passa de 145 cm.
d) está a 0,5 m de atingir seu máximo.

17) Uma coruja está pousada em R, ponto mais alto de um poste, a uma altura h do ponto P, no chão. Ela é vista por um rato no ponto A, no solo, sob um ângulo de 30°, conforme mostra a figura abaixo.

O rato se desloca em linha reta até o ponto B, de onde vê a coruja, agora sob um ângulo de 45° com o chão e a uma distância $\overline{BR}$ de medida $6\sqrt{2}$ metros. Com base nessas informações, estando os pontos A, B e P alinhados e desprezando-se a espessura do poste, pode-se afirmar então que a medida do deslocamento $\overline{AB}$ do rato, em metros, é um número entre
a) 3 e 4
b) 4 e 5
c) 5 e 6
d) 6 e 7
e) 7 e 8

18) De 2002 a 2010 “a carga tributária saltou de 32,7% para 37% (...) O brasileiro médio tem de trabalhar 148 dias por ano para pagar seus impostos.”

(Fonte: Revista Veja de 05/01/2011, pág. 78)

O gráfico abaixo representa o volume de tributos (em percentual) cobrados pelo governo de 2002 a 2010.

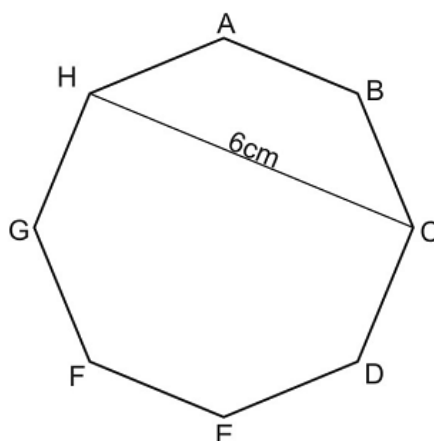
Com base nas informações do gráfico, marque a alternativa **FALSA**.

a) O crescimento do volume de tributos do ano de 2002 ao ano de 2004 foi maior que o do ano de 2006 ao ano de 2008.

b) Se o volume de tributos do ano de 2010 é x% maior que o volume de tributos do ano de 2002, então $x > 12$.

c) O volume de tributos do ano de 2004 é maior que 0,9 do volume de tributos do ano de 2010.

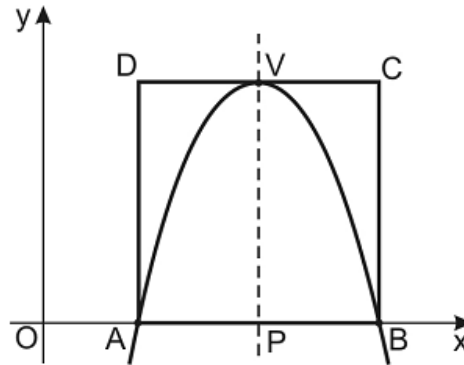
d) Supondo que do ano de 2008 ao ano de 2011 o aumento anual do volume de tributos seja constante e que o volume de tributos do ano de 2011 seja p, então $p > 38\%$.

19) A figura abaixo representa um octógono regular tal que $\overline{CH} = 6\text{ cm}$.

A área desse polígono, em cm^2, é igual a

a) $56(\sqrt{2}-1)$

b) $64(\sqrt{2}-1)$

c) $72\left(\sqrt{2}-1\right)$
d) $80\left(\sqrt{2}-1\right)$

20) Considere a parábola que representa a igualdade $y = ax^2 + bx + c$, de eixo de simetria $\overleftrightarrow{PV}$, e o quadrado ABCD indicados na figura abaixo.

Sabendo-se que os pontos A e B pertencem à parábola e ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ e sendo V o ponto onde a parábola tangencia o segmento $\overline{DC}$, o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$ é
a) 4
b) 8
c) 16
d) 20

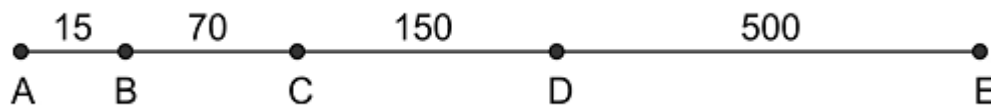
PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2010/2011

1) Considere os números positivos q, m e n, tais que $\frac{m}{n+q}=2$ e $\frac{m}{n-q}=3$. Ordenando-os, tem-se a sequência correta em

a) $m>n>q$
b) $m>q>n$
c) $n>m>q$
d) $q>n>m$

2) Se $x=1,0\overline{62}+\frac{\left[(-2)^{\left(2\sqrt{2}+1\right)}\right]^{\left(2\sqrt{2}-1\right)}}{64}$, então x está compreendido entre

a) -1 e $-0,9$
b) $-0,9$ e $-0,8$
c) $-0,8$ e $-0,7$
d) $-0,7$ e $0,6$

3) Um agricultor fará uma plantação de feijão em canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.

Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância d entre todos eles fosse a mesma e a maior possível.
Se x representa o número de vezes que a distância d foi obtida pelo agricultor, então x é um número divisível por

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

4) Para a reforma do Ginásio de Esporte da EPCAR foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (2ª feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10º dia, 4 operários foram dispensados.
No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia e concluíram a reforma. Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folgas em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é

a) domingo.
b) segunda-feira.
c) terça-feira
d) quarta-feira

5) Lucas e Mateus ganharam de presente de aniversário as quantias x e y reais, respectivamente, e aplicaram, a juros simples, todo o dinheiro que ganharam, da seguinte forma:

(1) Mateus aplicou a quantia y durante um tempo que foi metade do que esteve aplicado a quantia x de Lucas.

(2) Mateus aplicou seu dinheiro a uma taxa igual ao triplo da taxa da quantia aplicada por Lucas.

(3) No resgate de cada quantia aplicada, Lucas e Mateus receberam o mesmo valor de juros.

Se juntos os dois ganharam de presente 516 reais, então $x - y$ é igual a

a) R$ 103,20
b) R$ 106,40
c) R$ 108,30
d) R$ 109,60

6) Considere três números naturais a, b e c, nessa ordem. A soma desses números é 888, a diferença entre o primeiro e o segundo é igual ao terceiro. O terceiro deles excede o segundo em 198. O valor da diferença entre o primeiro e o terceiro é tal que excede 90 em

a) 23
b) 33
c) 43
d) 53

7) Se somarmos sete números inteiros pares positivos e consecutivos, obteremos 770. O número de divisores naturais do maior dos sete números citados é

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

8) Analise a alternativa abaixo, considerando todas as equações na incógnita x, e, a seguir, marque a correta.

a) Na equação $x^2 - mx + n = 0$ $(m, n \in \mathbb{R})$, sabe-se que a e b são suas raízes reais. Logo, o valor de $(a+b)-(a \cdot b)$ é, necessariamente, $(n-m)$.

b) Para que a soma das raízes da equação $2x^2 - 3x + p = 0$ $(p \in \mathbb{R})$ seja igual ao produto dessas raízes, p deve ser igual a $\frac{3}{2}$.

c) Se a equação $3x^2 - 3x + m = 0$ $(m \in \mathbb{R})$ NÃO possui raízes reais, então o valor de m pode ser igual a $-\frac{3}{4}$.

d) Uma das raízes da equação $x^2 + Sx - P = 0$ $(S, P \in \mathbb{R})$ é o número 1, logo $(S-P)$ é igual a -1.

9) Se $a \in \mathbb{R}_+^*$ é raiz da equação na incógnita y, $\sqrt{1-\sqrt{y^4 - y^2}} = y - 1$, então

a) $0 < a < 1$
b) $1 < a < \frac{3}{2}$
c) $\frac{3}{2} < a < 2$

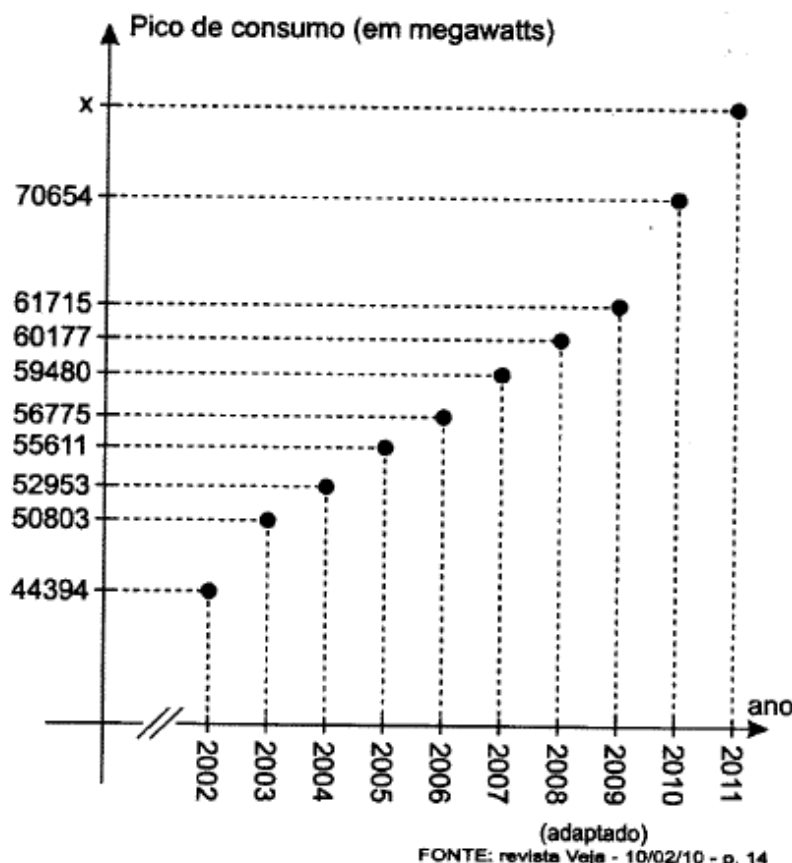
d) $2 < a < \frac{5}{2}$

10) No tempo $t = 0$, o tanque de um automóvel está com α litros de combustível. O volume de combustível no tanque, em litros, após o carro entrar em movimento, é descrito por uma função do 2º grau em função do tempo t, em minutos.
O carro entra em movimento. Após 10 minutos do início do movimento, o tanque está com 36 litros de combustível e após 3 horas e 10 minutos do início do movimento, o volume de combustível no tanque se esgota.
Sabe-se que o gráfico dessa função toca o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ num único ponto de coordenadas (190, 0).
Dessa forma, o número α está compreendido entre
a) 40 e 42
b) 42 e 44
c) 44 e 46
d) 46 e 48

11) Certo dia, Isabela e Ana Beatriz saíram para vender pastéis na praia. Elas tinham juntas 460 pastéis. No final do dia, verificou-se que Isabela conseguiu vender $\frac{3}{5}$ dos pastéis que levara e Ana Beatriz $\frac{5}{8}$ dos pastéis que levara.
Ao final do dia, o número de pastéis que restou para Ana Beatriz era a metade do número de pastéis que restou para Isabela.
Se Ana Beatriz, levou x pastéis para vender, então, a soma dos algarismos de x é
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9

12) Em um certo período, o valor total da cesta básica de alimentos subiu 82% e o salário mínimo, nesse mesmo período, aumentou 30%.
Para que recupere o poder de compra da cesta básica de alimentos, o salário mínimo deverá ser aumentado em y%.
O valor de y, então, é tal que 20 está para y assim como 8 está para
a) 12
b) 16
c) 24
d) 32

13) "Demanda Crescente
O consumo de energia elétrica no Brasil nunca foi tão alto. Na quinta-feira passada, atingiu seu recorde histórico. O valor é muito superior ao registrado em anos, anteriores"
(revista Veja – 10/02/10 – p.71)

O gráfico abaixo indica o pico de consumo de energia (em megawatts) na primeira quinta-feira de fevereiro dos anos de 2002 a 2010.

Analisando-se o gráfico acima e supondo-se que em 2011, na primeira quinta-feira do mês de fevereiro, haverá um crescimento do pico de consumo de energia, proporcional ao crescimento ocorrido na primeira quita-feira do mês de fevereiro do ano de 2009 ao ano de 2010, é correto afirmar que x é um número compreendido entre

a) 76000 e 77000
b) 77000 e 78000
c) 78000 e 79000
d) 79000 e 80000

14) Considere o octógono regular ABCDEFG inscrito numa circunferência λ e de raio R. Se esse mesmo octógono circunscreve uma circunferência α de raio r, então razão entre os quadrados dos comprimentos das circunferências λ e α é, nessa ordem, igual a

a) $\left(2+\sqrt{2}\right)$

b) $2\left(2+\sqrt{2}\right)$

c) $2\left(2-\sqrt{2}\right)$

d) $2\left(2-\sqrt{2}\right)$

15) Sabe-se que x, y e z são números naturais distintos e $x > y$. Considere $A = x \cdot y$ e $B = (x \cdot y \cdot z)^2$ e que o $\text{mdc}(A, B)$ e o $\text{mmc}(A, B)$ são, respectivamente, 21 e 1764. Se $W = x^2 + y^2 + z^2$, então o conjunto formado pelos divisores naturais de W possui

a) 4 elementos.
b) 6 elementos.
c) 9 elementos.
d) 12 elementos.

16) Um comerciante vendeu 50% dos $\frac{3}{5}$ de seu estoque de pares de meia com lucro de 30% sobre o custo. Como pretendia renovar o estoque, reduziu o preço de venda e acabou tendo um prejuízo de 10% sobre o custo com a venda dos pares que restam em sua loja. É correto afirmar que, ao final do estoque, esse comerciante teve, sobre o custo, um
a) lucro de 2%
b) lucro de 20%
c) prejuízo de 2%
d) prejuízo de 20%

17) A "Avenida Euclidiana", retilínea, tem 190 m de comprimento e 0,5 dam de largura em toda a sua extensão. Para asfaltá-la, são necessários 380 kg de asfalto. Pretende-se asfaltar a "Avenida Pitagórica", também retilínea, cuja largura é 100 cm maior que a largura da "Avenida Euclidiana", onde será necessário utilizar 930 kg do mesmo asfalto (mesma espessura). Se o comprimento da "Avenida Pitagórica" é x dm, então, a soma, dos algarismos de x é igual a
a) 22
b) 23
c) 24
d) 25

18) Numa turma de um cursinho, 40% dos alunos são menores de idade. Com o objetivo de que somente metade dessa turma fosse composta por alunos maiores de idade, x% dos alunos maiores de idade foram remanejados para outra turma. Sabendo-se que não houve mais mudança nesse turma, é correto afirmar que x é igual a
a) 20
b) 30
c) $33,\bar{1}$
d) $33,\bar{3}$

19) A figura representa o logotipo que será estampado em 450 camisetas de uma Olimpíada de Matemática realizada entre os alunos do "Colégio Alfa". Essa figura é formada por um círculo de centro O inscrito num triângulo isósceles cuja base $\overline{BC}$ mede 24 cm e altura relativa a esse lado mede 16 cm. O círculo será pintado com tinta cinza e sabe-se que é necessário, exatamente, 1 pote de tinta cinza para pintar 5400 cm^2

Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de potes necessários para pintar o círculo em todas as camisetas é igual a (adote $\pi = 3$)
a) 9
b) 10
c) 11
d) 12

20) Para as eleições para a Presidência da República do Brasil foi feita uma pesquisa com 2400 pessoas sobre suas preferências em relação aos candidatos A, B e C. Sabe-se que cada pessoa optou por um único candidato, ou votou em branco, ou votou nulo, e que o diagrama abaixo indica os resultados da pesquisa.

Sabe-se que a diferença entre o número de pessoas que votou nulo e o número de pessoas que votou em B é y. Então, y representa a/o

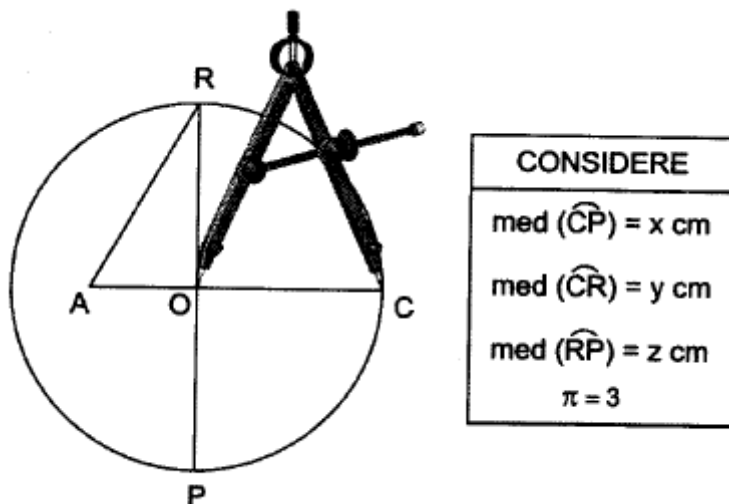
a) quarta parte do total de entrevistados.
b) metade do total de entrevistados.
c) terça parte do total de entrevistados.
d) dobro do número de pessoas que votou em C.

21) Sabendo que $y = (2010)^2 \cdot 2000 - 2000 \cdot (1990)^2$, o valor de $\frac{y}{10^7}$ é igual a

a) 8
b) 16
c) 20
d) 32

22) Simplificando-se a expressão $S = \frac{(x^{-2})^{2^{2^2}} \cdot \left[(-x^{-2})^{3^{2^2}}\right]^{-1}}{x^{2^3} \cdot \left[(-x^3)^{3^2}\right]^{2^3}}$, onde $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$, obtém-se

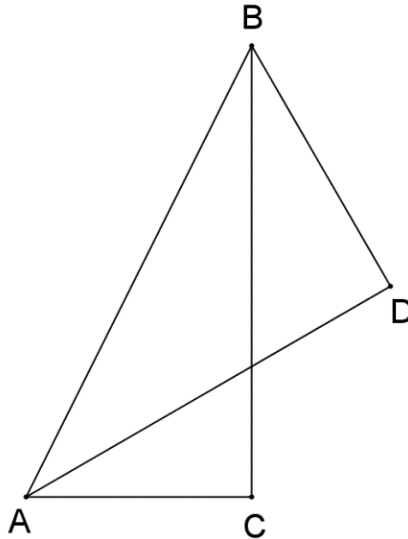
a) $-x^{-94}$
b) x^{94}
c) x^{-94}
d) $-x^{94}$

23) O quarteto de alunos da corrida de revezamento do CPCAR tem como "escudo" o desenho esquematizado na construção com régua e compasso abaixo.

Sabe-se que a abertura do compasso no esquema é de 5 cm, o centro da circunferência é O, o ângulo $C\hat{A}R$ mede 60° e os ângulos $C\hat{O}P$, $C\hat{O}R$, $P\hat{O}A$ e $R\hat{O}A$ são congruentes.
Sendo $E = x + \overline{PO} + \overline{OR} + \overline{RA} + \overline{OA} + \overline{OC} + y + z$, o valor de E, em cm, é dado por

a) $15\left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
b) $5\left(11 + \sqrt{2}\right)$

c) $5\left(11+\sqrt{3}\right)$

d) $5\left(9+\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

24) Em relação à figura abaixo, tem-se $C\hat{A}D = 30°$, $\overline{AC} = 2cm$ e $\overline{BC} = 4cm$.

Se $AC \perp CB$ e $AD \perp DB$ então, $\overline{BD}$, em cm, é igual a

a) $\frac{6-\sqrt{3}}{3}$

b) $6\sqrt{3}-3$

c) $2\sqrt{3}-1$

d) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2009/2010

1) Considere os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ e analise as proposições abaixo, classificando-as em (V) verdadeiras ou (F) falsas.

( ) Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 6n + 3, n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$, então $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$.

( ) Se $P = \mathbb{R} \cap \mathbb{N}$, $T = (\mathbb{N}^* \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$ e $S = \mathbb{N}^* \cup (\mathbb{Z}_+^* \cap \mathbb{Q})$, então $P \cap T \cap S = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}_-$.

( ) Se $y = \sqrt[n]{\dfrac{600}{25^{n+2} - 5^{2n+2}}}$ para $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, então y é irracional.

Marque a alternativa que apresenta a sequência correta.
a) V – V – F
b) F – F – V
c) V – F – F
d) F – V – V
e) F – F – F

2) Um número x de três algarismos, tal que $\sqrt{x} < 14$, tem o produto de seus algarismos igual a 24; se permutarmos os dois últimos algarismos de x, o número y assim obtido excede x de 18 unidades. Com base nos dados acima, é correto afirmar que
a) o máximo divisor comum de y e x NÃO é um número primo.
b) a razão $r = \dfrac{x}{y}$ é tal que $r > \dfrac{37}{41}$.
c) y tem 2 divisores a mais que x.
d) a soma dos algarismos de x com os algarismos de y é menor que 20.

3) João pagou a metade dos $\dfrac{3}{5}$ do que devia. Ao procurar o credor para quitar o restante de sua dívida, foram-lhe apresentadas duas propostas:
1ª) Pagar tudo à vista com 10% de desconto.
2ª) Assumir um acréscimo de 30% para um possível pagamento parcelado.
João optou pelo pagamento à vista e gastou exatamente 945 reais para quitar o restante da dívida. Caso optasse pela 2ª proposta, João teria gasto a mais um valor em reais compreendido entre
a) 390 e 410
b) 410 e 430
c) 430 e 450
d) 450 e 470

4) Nos preparativos da festa de 60 anos da EPCAR, um grupo A composto de 6 soldados, trabalhando 6 horas por dia, contava com o prazo de 7 dias para aparar a grama dos jardins, utilizando todos os componentes o mesmo tipo de equipamento. Já que outros setores da Escola necessitavam também de reparos, ao final do 5° dia, quando apenas 75% do gramado estava cortado, alguns soldados foram remanejados e um novo grupo B se formou. Esse grupo B, cuja quantidade de soldados correspondia

a $\frac{1}{3}$ do grupo A, dispôs-se a acabar de aparar a grama dos jardins, aumentando a carga horária diária em $33\frac{1}{3}\%$ e utilizando equipamentos cuja produtividade era o triplo dos equipamentos utilizados pelo grupo A. Supondo que todos os equipamentos tiveram perfeito funcionamento aproveitando sua capacidade máxima, é correto afirmar que o grupo B concluiu a tarefa
a) após o prazo previsto de sete dias.
b) em dez horas de trabalho.
c) em oito horas de trabalho.
d) um dia antes do prazo previsto.

5) Pedro colocou um terreno a venda visando um lucro de 20% sobre o preço de custo. Tendo em vista que a crise financeira atual dificultou a transação, ele resolveu fazer a venda em duas etapas:
1ª etapa: Vendeu $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3}$ do terreno reduzindo a taxa de lucro à metade e recebeu R$ 44.000,00 pelo negócio.
2ª etapa: Vendeu o restante do terreno e conseguiu o lucro de 20% sobre o custo desta parte.
Analisando os fatos acima, concluiu-se que Pedro
a) havia pago pelo terreno todo menos de R$ 90.000,00.
b) recebeu, no total, menos de R$ 110.000,00.
c) teve uma redução de 5 mil reais no lucro total pretendido.
d) teve um lucro real de 16% sobre o preço de custo.

6) Um estudante, preparando-se para o Exame de Admissão ao CPCAR, resolveu todas as N questões de uma prova. Ele acertou 8 das 18 primeiras e acertou $\frac{5}{6}$ das restantes. Sabe-se que o estudante acertou 75% do total de questões da prova. A quantidade de questões que ele errou nessa prova é um número compreendido entre
a) 5 e 10
b) 10 e 15
c) 15 e 20
d) 20 e 25

7) Analise as expressões abaixo.

$$A = \sqrt[3]{\frac{(0,005)^2 \cdot (0,000075)}{10}}$$

$$B = -\left[\frac{(5 \cdot 10^{-4}).(2^{-1/3})}{3^{-1/3}}\right]$$

Marque a resposta correta.
a) $A + B > 0$
b) $A \cdot B = -1$
c) $\frac{A}{B} = -1$
d) $A^{-1} = B$

8) A figura plana abaixo representa o logotipo de uma empresa. Ele foi projetado a partir de um triângulo equilátero central, cujo perímetro mede 0,30 m. Expandiu-se o desenho, acoplando em cada lado desse triângulo um quadrado. Para fechar a figura, foram traçados 3 segmentos retilíneos, completando assim o logotipo.

Nos preparativos para a Copa do Mundo de 2010, esse logotipo será pintado com tintas de mesma qualidade e textura, a saber:
- o triângulo central, na cor branca;
- os demais triângulos, na cor verde;
- os quadrados, na cor amarela.

Sabe-se que cada figura será pintada apenas uma vez e que cada mililitro de tinta cobre 1 cm^2 de área. Considere $\sqrt{3} = 1,74$ e marque a alternativa correta.

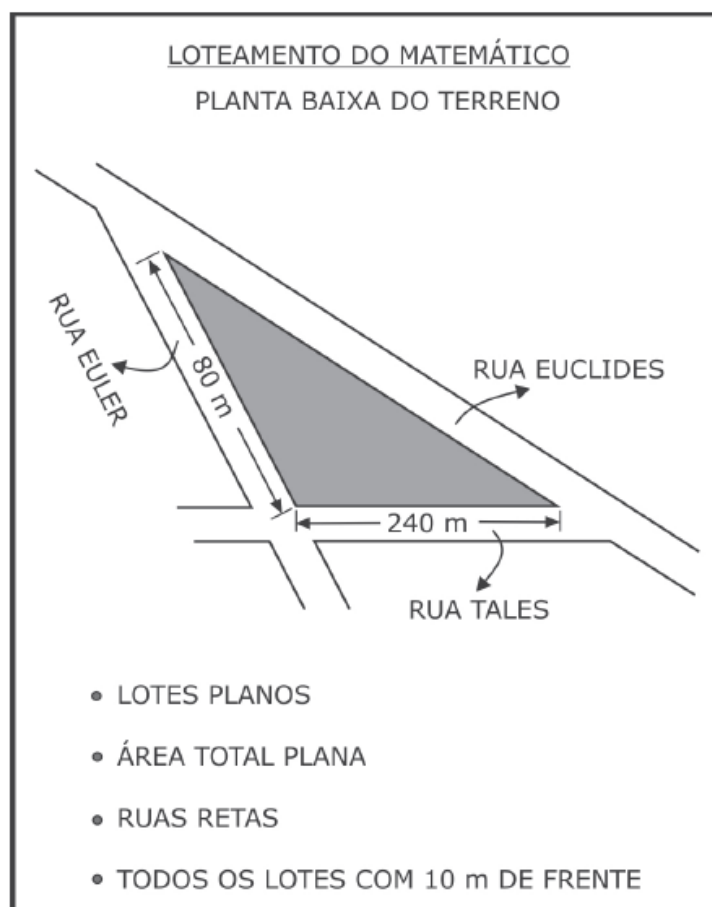
a) O consumo total de tinta será de mais de meio litro.
b) As áreas branca e verde juntas equivalem a 58% da área amarela.
c) O consumo de tinta amarela será o dobro do consumo de tinta verde.
d) A área branca corresponde a 30% da área verde.

9) Um pintor foi contratado para pintar a fachada do prédio do Comando da EPCAR, em decorrência das comemorações do seu sexagésimo aniversário.
Esse pintor cobra um valor fixo de 30 reais e mais uma quantia proporcional à área pintada.
A tabela seguinte indica o orçamento apresentado pelo pintor.

Área **x** pintada (em m²)	Total **y** a pagar pela pintura (em reais) incluindo a parcela fixa
5	40
10	50
15	60
20	70
30	90
40	110

Com base nos dados acima, classifique em (V) verdadeiro ou (F) falso cada item abaixo.
(   ) O pintor cobra 30 reais mais 3 reais pelo metro quadrado pintado.
(   ) Se foram pagos pela pintura 530 reais, então a área pintada foi de 250 m^2.
(   ) Pela pintura de uma área correspondente a 150 m^2 seria cobrado menos de 300 reais.
Tem-se a sequência correta em
a) V – F – F
b) V – F – V
c) F – V – F

d) F – F – V

10) Uma empresa imobiliária colocou num outdoor de uma cidade do interior de Minas Gerais o anúncio como reproduzido abaixo.

Considerando que o terreno loteado é em forma de triângulo, como no desenho acima, onde as ruas Tales e Euler cruzam-se sob ângulo obtuso, é correto afirmar que os números MÍNIMO e MÁXIMO de lotes do Loteamento do Matemático são, respectivamente, iguais a

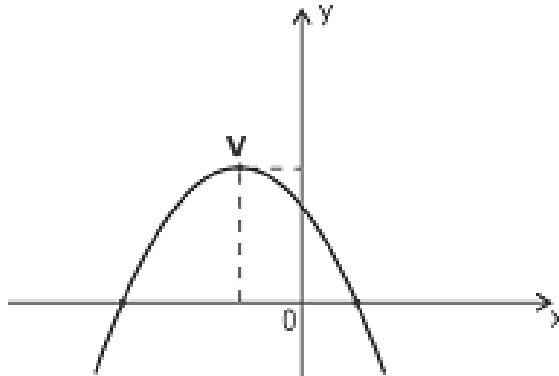
a) 56 e 63
b) 57 e 64
c) 57 e 63
d) 48 e 64

11) Considere os números a, b e x tais que $a+b=x$, $a-b=x^{-1}$ e $a \neq b \neq 0$. O valor da expressão

$$y=\frac{\dfrac{\left(a^2+2ab+b^2\right)\left(a^3-b^3\right)}{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+ab+b^2\right)}}{\left(\dfrac{a^2-ab}{2a}\right)}$$ é

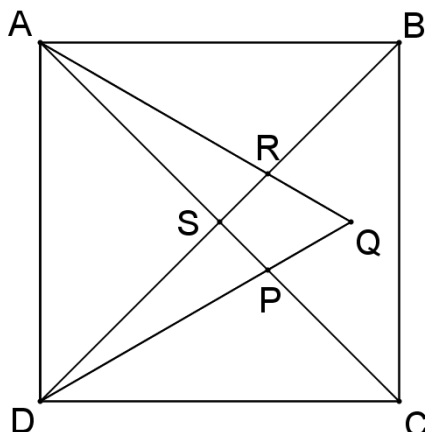
a) 2
b) $2x^2$
c) x^2

d) $\frac{x^2}{2}$

12) Seja f a função real definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e V, o vértice da parábola representada graficamente por

Após a análise gráfica, assinale a alternativa INCORRETA.
a) $a \cdot b \cdot c^2 < 0$
b) $\frac{ab^2}{c} < 0$
c) $a^2 + bc > 0$
d) $bc - a < 0$

13) A média aritmética das raízes da equação $\sqrt{a+x} = \sqrt{a} + \sqrt{a-x}$, na incógnita x, $a \in \mathbb{Q}_+^*$ é um número
a) irracional positivo.
b) primo ímpar.
c) múltiplo de 12.
d) divisor par de 30.

14) Se as 156 camas de um dormitório forem distribuídas em x fileiras horizontais iguais, contendo y camas cada, sobrarão 6 camas. Se as mesmas 156 camas forem distribuídas em $(x+5)$ fileiras horizontais iguais, contendo $(y-1)$ camas cada, ainda continuarão sobrando 6 camas. Então, $(x+y)$ é igual a
a) 31
b) 30
c) 29
d) 28

15) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e ADQ é um triângulo equilátero.

Os pontos D, S, R e B estão alinhados, assim como A, S, P e C. Se $\overline{RB} \equiv \overline{QB} \equiv \overline{PC} \equiv \overline{QC}$, então é INCORRETO afirmar que

a) nos triângulos CBQ e SAR tem-se $S\hat{A}R \neq C\hat{B}Q$.

b) nos triângulos BQD, ARB e AQD tem-se $B\hat{Q}D + A\hat{R}B = 4\left(A\hat{Q}D\right)$.

c) a soma dos ângulos $D\hat{P}C$ e $A\hat{S}D$ dos triângulos DPC e ASD é maior do que o ângulo $B\hat{Q}C$ do triângulo BQC.

d) nos triângulos SAR e PCQ tem-se $S\hat{R}A - C\hat{P}Q = 0$.

16) A Revista Época publicou uma reportagem de março de 2009 sobre as possíveis mudanças na Caderneta de Poupança no Brasil.

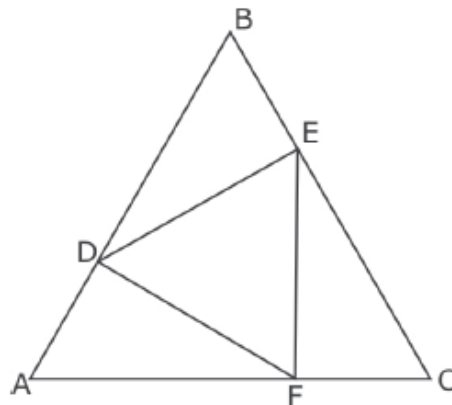
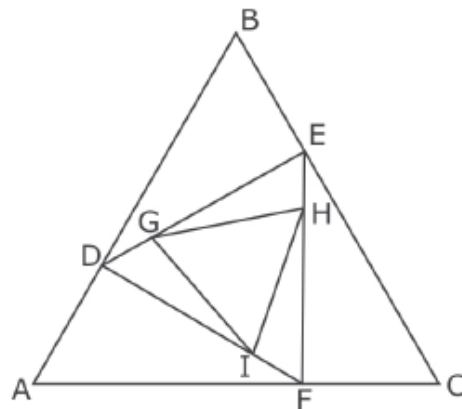
"... Antigo patinho feio das aplicações financeiras, a boa e vela Caderneta de Poupança voltou a despertar os olhares dos investidores ávidos por fazer o dinheiro render sem correr riscos."

O gráfico abaixo mostra o rendimento anual de dois fundos de aplicação, CDI e Caderneta de Poupança, diariamente no período entre 1º de janeiro de 2006 e 31 de dezembro de 2008 (cada ano na abscissa indica o final do ano anterior e o início daquele ano). Por exemplo, em 1º de janeiro de 2006, o rendimento anual da Caderneta de Poupança era 8,32% e o rendimento anual do CDI era 10,83%.

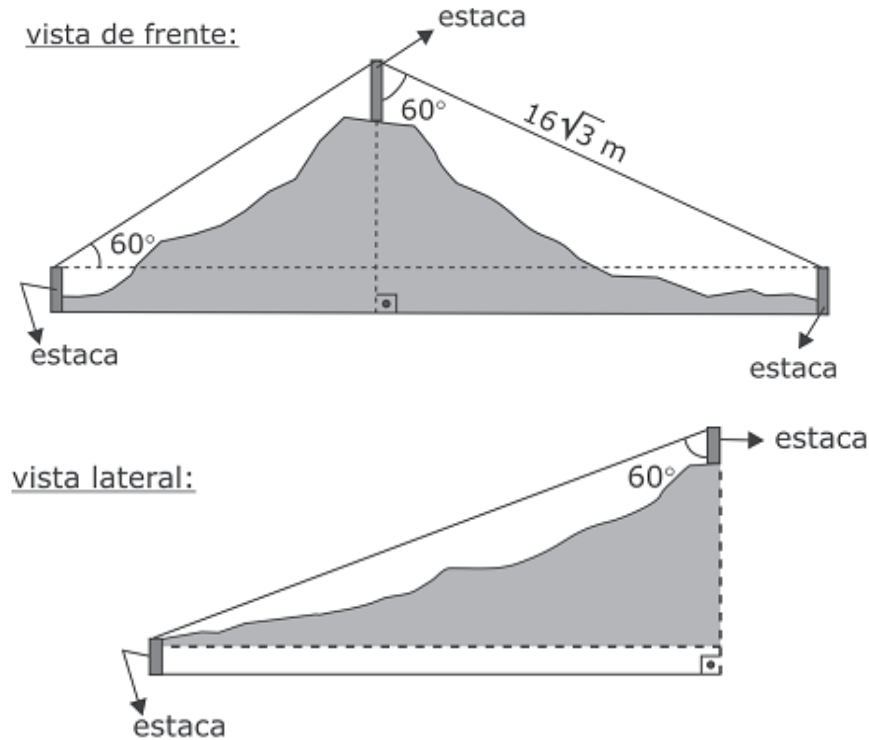
Analise o gráfico acima e classifique as proposições que seguem em (V) verdadeiras ou (F) falsas.
( ) Durante o ano de 2008, a Caderneta de Poupança teve rendimento percentual constante.
( ) A aplicação no CDI foi sempre mais vantajosa em qualquer período entre janeiro de 2006 e dezembro de 2008.
( ) No primeiro semestre de 2008, houve um momento em que era indiferente aplicar no CDI ou na Caderneta de Poupança.
Tem-se a sequência correta em
a) V – V – F
b) V – F – V
c) V – F – F
d) F – V – F

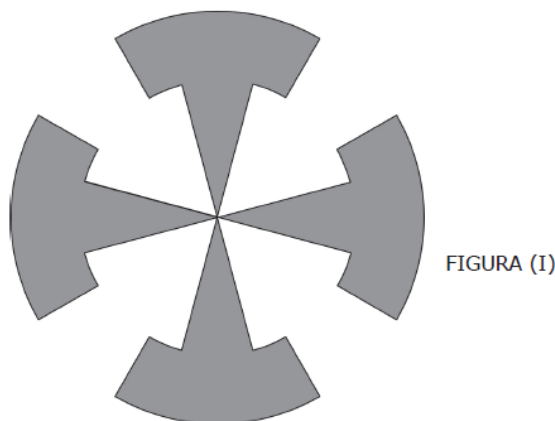
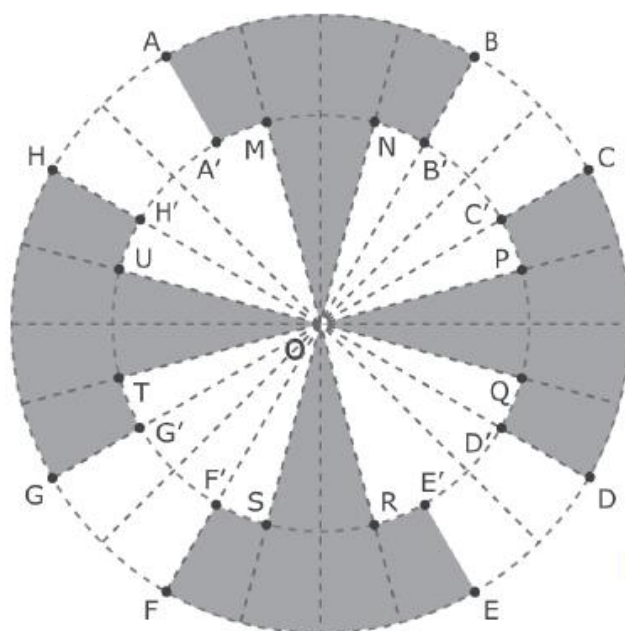
17) Durante as comemorações dos 60 anos da EPCAR, em virtude do louvável destaque que os alunos do CPCAR alcançaram em 2008 nas Olimpíadas de Matemática, serão produzidas placas para premiação dos melhores classificados.
Tais placas deverão conter o emblema abaixo cujas figuras geométricas (circunferência e triângulos) terão seu contorno coberto por um fio de ouro de espessura uniforme.

Dados:
$AB = 180^\circ;\ \overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 12\text{ cm};\ \overline{AC} = \overline{AD};\ C\hat{O}D = 120^\circ;\ \pi = 3;\ \sqrt{3} = 1,7$
Sabendo que 10 g de ouro custam R$ 450, 00 e produzem 10 cm desse fio, pode-se estimar que o valor, em reais, gasto com o ouro para a confecção de uma medalha estará entre os números
a) 7500 e 8000
b) 8000 e 8500
c) 8500 e 9000
d) 9000 e 9500

18) Sobre os lados do triângulo equilátero ABC abaixo tomam-se os pontos D, E e F tais que $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$.

Sobre os lados do triângulo DEF da figura (I), tomam-se os pontos G, H e I tais que $\overline{DG} = \overline{EH} = \overline{FI}$.

Com base nas figuras (I) e (II), tem-se, necessariamente, que
a) o triângulo GHI é isósceles.

b) os triângulos DGI, GEH e HFI são retângulos.
c) $\overline{IH} \parallel \overline{AB}$, $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{IG} \parallel \overline{BC}$.
d) $G\hat{H}E$ é agudo.

19) Chama-se agrimensura a arte de medição de terras. O agrimensor é aquele que obtém as medidas de um terreno. Um fazendeiro comprou um terreno cuja base planificada tem a forma de um retângulo. A pedido do fazendeiro, o agrimensor desenhou a vista frontal e a vista lateral desse terreno indicando medidas precisas que ele obteve utilizando-se de estacas auxiliares de mesma medida.

Tomando-se como referência a forma planificada retangular do terreno cujo custo do metro quadrado foi de 120 reais para o fazendeiro, é correto afirmar que
a) tem mais de 20 m de lateral.
b) sua área total é de $336\ m^2$.
c) foi comprado pelo valor de 96.210 reais.
d) tem menos de 30 m de frente.

20) O símbolo para a "Cooperativa Agrícola Bequeana" é o desenho da figura abaixo.

Tal símbolo foi elaborado seguindo as indicações na figura a seguir.

Dados: $\overline{OH} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} ... \overline{OH} = 20 \text{ cm}$

$\overline{OA'} \equiv \overline{OM} \equiv \overline{ON} \equiv \overline{OB'} \equiv ... \equiv \overline{OU} \equiv \overline{OH'} = 15 \text{ cm}$

Na figura (II) o espaço entre duas linhas retas tracejadas e consecutivas, indica um ângulo central de 15º. A área hachurada da figura, em cm^2, mede

a) $\frac{475\pi}{3}$

b) $\frac{575\pi}{6}$

c) $\frac{435\pi}{2}$

d) $\frac{575\pi}{3}$

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr 2015/2016

1) b (Racionalização)
2) b (Problemas do 1º grau com mais de uma variável)
3) a (Problemas do 1º grau com mais de uma variável)
4) c (Operações com mercadorias)
5) d (Sistema métrico)
6) a (Porcentagem)
7) b (Potências e raízes)
8) a (Equação e inequação do 1º grau)
9) d (Semelhança de triângulos)
10) a (Produtos notáveis)
11) c (Operações com mercadorias)
12) c (Função quadrática)
13) d (Problemas tipo torneira)
14) b (Relações métricas nos triângulos)
15) a (Áreas de figuras planas)
16) c (Noções de estatística – análise de gráficos)

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr 2014/2015

1) c (Múltiplos e divisores)
2) a (Problemas do 2° grau)
3) c (Equação do 2° grau)
4) b (Áreas)
5) a (Fatoração)
6) a (Equação irracional)
7) a (Comprimentos na circunferência)
8) b (Potências e raízes)
9) d (Problemas do 1º grau)
10) d (Razões e proporções)
11) b (Desigualdade triangular)
12) a (Áreas)
13) a (Relações métricas na circunferência)
14) b (Problemas do 1° grau)
15) d (Problemas do 1° grau com mais de uma variável)
16) d (Função quadrática)

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr 2013/2014

1) c (Problemas do 1º grau com mais de uma variável)
2) d (Produtos notáveis e fatoração)
3) a (Relações métricas em um triângulo qualquer)
4) b (Operações com mercadorias)
5) b (Regra de três)
6) c (Problemas do 2º grau)
7) a (Razões e proporções)
8) a (Áreas)
9) d (Potências e raízes)
10) c (Razões e proporções)
11) a (Razões e Proporções / Sistema métrico)
12) d (Equação do 2º grau)
13) b (Áreas)
14) c (Semelhança / Calendário)
15) b (Análise de gráficos)
16) b (Função quadrática)

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr 2012/2013

1) c (Potências e raízes)
2) c (Equação irracional)
3) d (Relações métricas no círculo)
4) d (Múltiplos e divisores)
5) b (Problemas do 1º grau com mais de uma variável)
6) d (Produtos notáveis e fatoração)
7) b (Razões e proporções / Sistema métrico)
8) a (Problemas tipo torneira)
9) d (Razões e proporções / Sistema métrico)
10) b (Análise de gráficos / Porcentagem)
11) b (Semelhança de triângulos / Quadriláteros notáveis)
12) c (Equação e inequação do 1° grau / Equação do 2° grau)
13) b (Regra de três)
14) c (Juros simples)
15) a (Problemas do 1º grau com mais de uma variável)
16) d (Função quadrática)
17) a (Áreas)
18) d (Divisão em partes proporcionais)
19) c (Triângulos)
20) b (Operações com mercadorias)

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr 2011/2012

1) c (Razões e proporções)
2) d (Áreas)
3) a (Equação do 1° grau)

4) b (Múltiplos e divisores)
5) a (Razões e proporções)
6) a (Potências e raízes)
7) b (Equação irracional)
8) d (Semelhança de triângulos)
9) c (Misturas)
10) a (MMC)
11) b (Razões e proporções / Operações com mercadorias)
12) a (Problemas do 1º grau com mais de uma variável)
13) c (Raciocínio lógico)
14) c (Comprimento da circunferência)
15) d (Juros simples)
16) b (Sistema métrico)
17) b (Trigonometria no triângulo retângulo)
18) d (Análise de gráficos / Porcentagem)
19) c (Relações métricas nos polígonos regulares)
20) c (Função quadrática)

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr 2010/2011

1) a (Sistemas lineares)
2) a (Potências e raízes)
3) d (MDC)
4) d (Regra de três)
5) a (Juros simples)
6) b (Sistemas lineares)
7) a (Problemas do 1° grau)
8) d (Equação do 2° grau)
9) b (Equação irracional)
10) a (Função quadrática)
11) b (Problemas do 1° grau com mais de uma variável)
12) b (Razões e proporções)
13) d (Noções de estatística – análise de gráficos)
14) c (Relações métricas nos polígonos regulares)
15) a (MDC/MMC)
16) a (Operações com mercadorias)
17) b (Sistema métrico)
18) d (Razões e proporções)
19) a (Áreas)
20) a (Noções de estatística – análise de gráficos)
21) b (Produtos notáveis e fatoração)
22) a (Potências e raízes)
23) a (Comprimentos na circunferência e trigonometria no triângulo retângulo)
24) c (Trigonometria no triângulo retângulo)

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr 2009/2010

1) a (Conjuntos numéricos)
2) c (Sistemas de numeração)
3) b (Operações com mercadorias)
4) b (Regra de três)
5) d (Operações com mercadorias)
6) d (Problemas do 1º grau com uma variável)
7) c (Potências e raízes)
8) b (Geometria plana – áreas)
9) c (Função do 1º grau)
10) c (Geometria plana – triângulos)
11) b (Produtos notáveis e fatoração)
12) d (Função quadrática)
13) a (Equações irracionais)
14) a (Problemas do 2º grau)
15) a (Geometria plana – triângulos)
16) b (Noções de estatística – análise de gráficos)
17) b (Geometria plana – polígonos regulares)
18) a (Geometria plana – triângulos)
19) a (Trigonometria no triângulo retângulo)
20) d (Geometria plana áreas)

QUADRO RESUMO DE ASSUNTOS DE 2010 A 2016

ASSUNTOS	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL	PERCENTUAL
Múltiplos e divisores			1	1		1		3	2,3%
MDC/MMC		2	1					3	2,3%
Razões, proporções e porcentagem		2	2	2	3	1	1	11	8,3%
Divisão em partes proporcionais				1				1	0,8%
Misturas			1					1	0,8%
Operações com mercadorias	2	1	1	1	1		2	8	6,1%
Calendário					1			1	0,8%
Regra de três	1	1		1	1			4	3,0%
Problemas tipo torneira				1			1	2	1,5%
Juros simples		1	1	1				3	2,3%
Raciocínio lógico			1					1	0,8%
Sistema métrico		1	1				1	3	2,3%
Conjuntos numéricos	1							1	0,8%
Sistemas de numeração	1							1	0,8%
Noções de estatística - análise de gráficos	1	2	1	1	1		1	7	5,3%
Potências e raízes	1	2	1	1	1	1	1	8	6,1%
Produtos notáveis e fatoração	1	1		1		1	1	5	3,8%
Racionalização					1		1	2	1,5%
Equação do 1° grau			1				1	2	1,5%
Problemas do 1º grau	1	1				2		4	3,0%
Problemas do 2° grau	1					1		2	1,5%
Equação do 2° grau		1		1	1	1		4	3,0%
Sistemas lineares		2						2	1,5%
Problemas do 1° grau com mais de uma variável		1	1	2	2	1	2	9	6,8%
Equação irracional	1	1	1	1		1		5	3,8%
Função do 1º grau	1							1	0,8%
Função quadrática	1	1	1	1	1	1	1	7	5,3%
Desigualdade triangular				1		1		2	1,5%
Trigonometria no triângulo retângulo	1	1	1					3	2,3%
Triângulos - ângulos e congruência	2							2	1,5%
Semelhança e relações métricas nos triângulos	1		1	1	1		2	6	4,5%
Comprimentos na circunferência		1	1			1		3	2,3%
Relações métricas na circunferência				1		1		2	1,5%
Relações métricas nos polígonos regulares	1	1						2	1,5%
Áreas	2	1	2	1	2	2	1	11	8,3%
TOTAL POR PROVA	**20**	**24**	**20**	**20**	**16**	**16**	**16**	**132**	**100,0%**
Artimética	6	10	10	9	7	2	6	50	37,9%
Álgebra	7	10	5	7	6	9	7	51	38,6%
Geometria Plana	7	4	5	4	3	5	3	31	23,5%

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2015/2016

1) O valor da soma $S=\sqrt{4}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{196}+\sqrt{195}}$ é um número

a) natural menor que 10.
b) natural maior que 10.
c) racional não inteiro.
d) irracional.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Vamos racionalizar as parcelas da soma, multiplicando cada fração encima e embaixo pelo conjugado (fator racionalizante) do denominador.

$$S=\sqrt{4}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{196}+\sqrt{195}}=$$

$$=\sqrt{4}+\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\ldots+\frac{\sqrt{196}-\sqrt{195}}{(\sqrt{196}+\sqrt{195})(\sqrt{196}-\sqrt{195})}=$$

$$=\sqrt{4}+\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{196}-\sqrt{195}}{196-195}=$$

$$=\sqrt{4}+(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\ldots+(\sqrt{196}-\cancel{\sqrt{195}})=$$

$$=2-1+14=15$$

Logo, S é um natural maior que 10.

2) Um casal que planejou uma viagem de férias para uma ilha, onde há um hotel com acomodações A e B, pagou antecipadamente x reais pelas diárias na acomodação A, que cobrava R$ 110,00 por dia. Ao chegar no hotel eles optaram pela acomodação B, que cobrava R$ 100,00 pela diária, pois perceberam que, assim, eles poderiam ficar mais 2 dias hospedados neste hotel. Sabendo que, além dos x reais já pagos, eles ainda gastaram R$ 150,00 por dia com alimentação e que não houve outras despesas, a quantia que esse casal gastou nesse hotel é um número compreendido entre

a) 5100 e 5400
b) 5400 e 5900
c) 5900 e 6300
d) 6300 e 6800

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Supondo que o casal ficaria, inicialmente, n dias no hotel, então
$x = 110 \cdot n = 100 \cdot (n+2) \Leftrightarrow 10n = 200 \Leftrightarrow n = 20 \wedge x = 110 \cdot 20 = 2200$.
Assim, o casal gastou 2200 reais com diárias e $150 \cdot (n+2) = 150 \cdot (20+2) = 3300$ reais com alimentação, o que totaliza $2200 + 3300 = 5500$ reais, que é um número compreendido entre 5400 e 5900.

3) As idades de dois irmãos hoje são números inteiros e consecutivos. Daqui a 4 anos, a diferença entre as idades deles será $\frac{1}{10}$ da idade do mais velho. A soma das idades desses irmãos, hoje, é um número
a) primo.
b) que divide 100.
c) múltiplo de 3.
d) divisor de 5.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Como as idades dos irmãos são dois números consecutivos, a diferença entre elas é 1, em qualquer ano.
É dado que daqui a 4 anos, a diferença entre as idades deles, ou seja, 1 será $\frac{1}{10}$ da idade do mais velho, então a idade do mais velho daqui a 4 anos é 10.
Logo, hoje, o mais velho tem $10 - 4 = 6$ anos e o mais novo 5 anos.
Portanto, a soma das idades desses irmãos é um número primo.

4) Analise as afirmativas abaixo.
I) Uma pessoa perdeu 30% de seu peso em um mês. No mês seguinte, aumentou seu peso em 40%. Ao final desses dois meses, em relação ao peso inicial, o peso dessa pessoa diminuiu 2%.
II) Quando num supermercado tem-se a promoção “pague 3 produtos e leve 4”, o desconto concedido é de 30%.
III) Há alguns meses, uma certa casa podia ser comprada por 25% do seu valor atual. O aumento no valor da casa nesse período foi de 75%.
Entre as afirmativas acima, é (são) FALSA(S)
a) apenas a II.
b) apenas I e III.
c) apenas II e III.
d) I, II e III.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO: **(O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma foi anulada da maneira como originalmente proposta.)**
I) VERDADEIRA
Se o peso inicial da pessoa era p, então, ao final do primeiro mês, seu peso era $(100\% - 30\%) \cdot p = 70\% \cdot p = 0,7p$.
No mês seguinte, seu peso era $(100\% + 40\%) \cdot 0,7p = 140\% \cdot 0,7p = 0,98 \cdot p$.
Logo, o peso da pessoa diminuiu $0,02 \cdot p = 2\% \cdot p$, ou seja, 2% do peso inicial.
Logo, em relação ao peso inicial, o peso dessa pessoa diminuiu 2%.
II) FALSA
Se o preço original de cada produto é p, levando 4 produtos, o cliente teria que pagar 4p, mas só terá que pagar 3p. Sendo assim, o desconto é de $\frac{4p - 3p}{4p} = \frac{1}{4} = 25\%$.
III) FALSA
Se o preço da casa há alguns meses era p e o valor atual p', então
$25\% \cdot p' = p \Leftrightarrow \frac{25}{100} \cdot p' = p \Leftrightarrow p' = 4p$.
Sendo assim, o aumento do valor da casa no período foi $\frac{4p - p}{p} = 3 = 300\%$.

5) Uma caixa de capacidade $6,4\,m^3$ deve ser abastecida com água. Abaixo estão representados três recipientes que podem ser utilizados para esse fim.

Considerando que não há perda no transporte da água, afirma-se que:
I) Pode-se usar qualquer dos recipientes 100 vezes para encher a caixa.
II) Se os recipientes A, B e C forem usados, respectivamente, 16, 33 e 50 vezes, a caixa ficará com sua capacidade máxima.
III) Após usar 20 vezes cada um dos recipientes, ainda não teremos metade da capacidade da caixa ocupada.
Das afirmativas acima, tem-se que é (são) verdadeira(s)
a) nenhuma delas.
b) apenas a III.
c) apenas a II.
d) apenas a I.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A capacidade da caixa é $6,4\ \text{m}^3 = 6,4 \cdot 1000\ \text{dm}^3 = 6400\ \text{dm}^3 = 6400\ \ell$.

A capacidade do recipiente A é $40 \cdot 40 \cdot 40 = 64000\ \text{cm}^3 = 64\ \text{dm}^3 = 64\ \ell$.

A capacidade do recipiente B é $200\ \text{mm} \cdot 4\ \text{dm} \cdot 0,8\ \text{m} = 2\ \text{dm} \cdot 4\ \text{dm} \cdot 8\ \text{dm} = 64\ \text{dm}^3 = 64\ \ell$.

A capacidade do recipiente C é $8\ \text{dm} \cdot 80\ \text{cm} \cdot 0,01\ \text{dam} = 8\ \text{dm} \cdot 8\ \text{dm} \cdot 1\ \text{dm} = 64\ \text{dm}^3 = 64\ \ell$.

I) VERDADEIRA
A capacidade de cada recipiente é 1/100 da capacidade da caixa.
II) FALSA
Como os recipientes têm a mesma capacidade, isso equivale a usar um deles $16+33+50=99$ vezes, o que não enche a caixa.
III) FALSA
Como os recipientes têm a mesma capacidade, isso equivale a usar um deles $3 \cdot 20 = 60$ vezes, o que enche 60% da caixa.

6) Uma pessoa vai tomar um medicamento 3 vezes ao dia, durante 14 dias, em doses de $6\text{m}\ell$ cada vez. Se cada frasco contém $200\ \text{cm}^3$ do medicamento, a quantidade do segundo frasco que NÃO será utilizada é
a) menor que 75%.
b) exatamente 75%.
c) maior que 76%.
d) exatamente 76%.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
A pessoa vai precisar de $3 \cdot 14 \cdot 6 = 252\ \text{m}\ell$ do medicamento.

Cada frasco contém $200\ \text{cm}^3 = 200\ \text{m}\ell$. Sendo assim, será utilizado um frasco e mais $52\ \text{m}\ell$ do segundo frasco.

Logo, não serão utilizados $200 - 52 = 148\ \text{m}\ell$ do segundo frasco, o que equivale a $\frac{148}{200} = \frac{74}{100} = 74\%$, que é menor do que 75%.

7) Sobre os números reais positivos a, b, c, d, p e q, considere as informações abaixo:

I) $(\text{abc})^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{0,25}$ e $(\text{abcd})^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{10}$

II) $\sqrt[3]{\text{p}} = 32$ e $\sqrt{\text{q}} = 243$

O valor de $x = \frac{d}{(pq)^{\frac{1}{5}}}$ é um número

a) racional inteiro.
b) decimal periódico.
c) decimal exato menor que 1.
d) decimal exato maior que 1.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$(abc)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (abc)^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow abc = 2^3 = 8$

$(abcd)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow abcd = \left(2\sqrt{10}\right)^2 = 40$

$d = \frac{abcd}{abc} = \frac{40}{8} = 5$

$\sqrt[3]{p} = 32 = 2^5 \Leftrightarrow p = \left(2^5\right)^3 = 2^{15}$

$\sqrt{q} = 243 = 3^5 \Leftrightarrow q = \left(3^5\right)^2 = 3^{10}$

$x = \frac{d}{(pq)^{\frac{1}{5}}} = \frac{5}{\left(2^{15} \cdot 3^{10}\right)^{\frac{1}{5}}} = \frac{5}{2^3 \cdot 3^2}$

Como o denominador possui fator 2 e fator 3, x é um número decimal periódico (dízima periódica composta).

8) Analise as afirmativas seguintes e classifique-as em V (verdadeira) ou F (falsa).

( ) Considere dois números pares, consecutivos e não nulos. O produto da soma dos inversos desses números pela metade do maior entre eles é um quociente entre dois números inteiros consecutivos.

( ) Para todo $a \in \mathbb{R}$ e para todo $b \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $3x - a = 5bx + 5b$.

( ) Se m é um número inteiro, ímpar e $m < -3$, então o menor valor para x, no conjunto solução da inequação $m(m+x) \le -3(x-3)$, é um número par positivo.

Tem-se a sequência correta em

a) V – F – V

b) F – V – V

c) F – V – F

d) V – F – F

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

(V) Sejam os números $2n+2$ e $2n$, $n \neq 0$, então o produto da soma dos inversos desses números pela metade do maior entre eles é $\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2}\right) \cdot \frac{2n+2}{2} = \left(\frac{(n+1)+n}{2n(n+1)}\right) \cdot (n+1) = \frac{2n+1}{2n}$ que é o quociente entre dois números inteiros consecutivos.

(F) $3x - a = 5bx + 5b \Leftrightarrow 3x - 5bx = a + 5b = x(3-5b) = a + 5b$

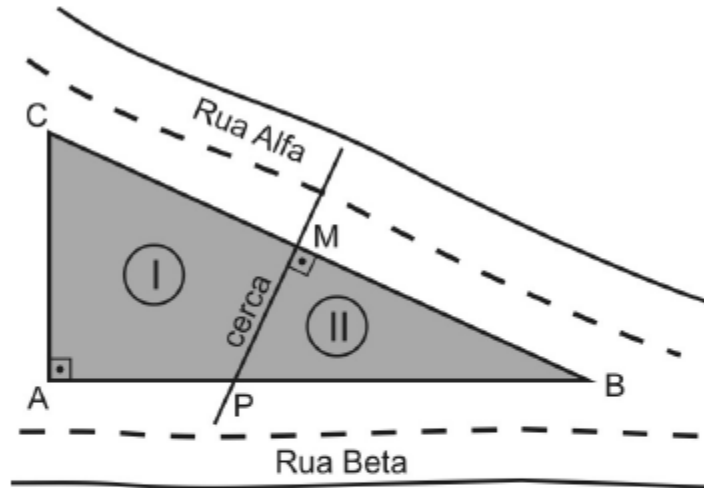
Se $3 - 5b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{5}$ e $a + 5b \neq 0$, então a equação do 1º grau é impossível, ou seja, não existe $x \in \mathbb{R}$.

(V) $m < -3 \Leftrightarrow m + 3 < 0$

$m(m+x) \le -3(x-3) \Leftrightarrow m^2 + mx \le -3x + 9 \Leftrightarrow mx + 3x \le 9 - m^2$

$\Leftrightarrow (m+3)x \le (3+m)(3-m) \Leftrightarrow x \ge 3 - m$

Como $m < -3$ e m é inteiro ímpar, então $m \leq -5 \Leftrightarrow -m \geq 5 \Leftrightarrow 3-m \geq 8 \Rightarrow x \geq 3-m \geq 8$
Logo, o menor valor de x é 8 que é um número par positivo.

9) Um terreno com formato de um triângulo retângulo será dividido em dois lotes por uma cerca feita na mediatriz da hipotenusa, conforme mostra figura.

Sabe-se que os lados AB e BC desse terreno medem, respectivamente, 80 m e 100 m. Assim, a razão entre o perímetro do lote I e o perímetro do lote II, nessa ordem, é

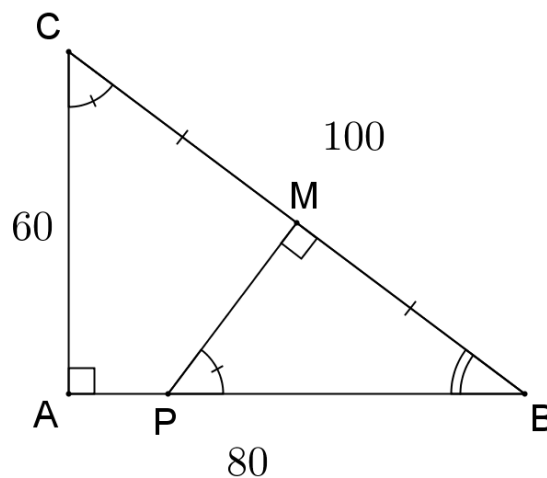
a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{10}{11}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{11}{10}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÕES:

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC, temos:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 80^2 + AC^2 = 100^2 \Leftrightarrow AC = 60$.

Como MP está sobre a mediatriz de BC, então M é ponto médio de BC, o que implica $MB = MC = 50$.

$\Delta BMP \sim \Delta BAC(A.A.A.) \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{BP}{BC} \Leftrightarrow \frac{50}{80} = \frac{MP}{60} = \frac{BP}{100} \Leftrightarrow MP = 37,5 \wedge BP = 62,5$

$AP = AB - BP = 80 - 62,5 = 17,5$

$2p_I = AP + PM + MC + CA = 17,5 + 37,5 + 50 + 60 = 165$

$2p_{II} = BM + MP + BP = 50 + 37,5 + 62,5 = 150$

$\frac{2p_I}{2p_{II}} = \frac{165}{150} = \frac{11}{10}$

10) O valor da expressão $\left(\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2 y + xy^2}{x^2 - y^2}\right)$, em que $x, y \in \mathbb{R}^*$ e $x \neq y$ e $x \neq -y$, é

a) -1
b) -2
c) 1
d) 2

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$x \neq y \Leftrightarrow x - y \neq 0$

$x \neq -y \Leftrightarrow x + y \neq 0$

$$\left(\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2 y + xy^2}{x^2 - y^2}\right) = \left(\frac{(x^{-1} + y^{-1})(x^{-1} - y^{-1})}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{xy(x+y)}{(x+y)(x-y)}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{xy}{x-y}\right) = \left(\frac{y-x}{xy}\right) \cdot \left(\frac{xy}{x-y}\right) = -1$$

11) O dono de uma loja de produtos seminovos adquiriu, parceladamente, dois eletrodomésticos. Após pagar $\frac{2}{5}$ do valor dessa compra, quando ainda devia R\$ 600,00, resolveu revendê-los. Com a venda de um dos eletrodomésticos, ele conseguiu um lucro de 20% sobre o custo, mas a venda do outro eletrodoméstico representou um prejuízo de 10% sobre o custo. Com o valor total apurado na revenda, ele pôde liquidar seu débito existente e ainda lhe sobrou a quantia de R\$ 525,00. A razão entre o preço de custo do eletrodoméstico mais caro e o preço de custo do eletrodoméstico mais barato, nessa ordem, é equivalente a

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Se, após pagar $\frac{2}{5}$ do valor da compra, o dono da loja ainda devia R$ 600,00, então esse valor representa $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ do valor da compra (custo).

Seja C o custo da compra, então $\frac{3}{5}\cdot C=600 \Leftrightarrow C=1000$.

Se, com o valor total apurado na revenda, o dono da loja pôde liquidar seu débito e ainda lhe sobrou R$ 525,00, então o valor apurado na revenda foi $600,00+525,00=1125,00$.

Supondo que o eletrodoméstico vendido com lucro de 20% sobre o custo custe P, então o eletrodoméstico vendido com prejuízo de 10% sobre o custo custa $1000-P$.

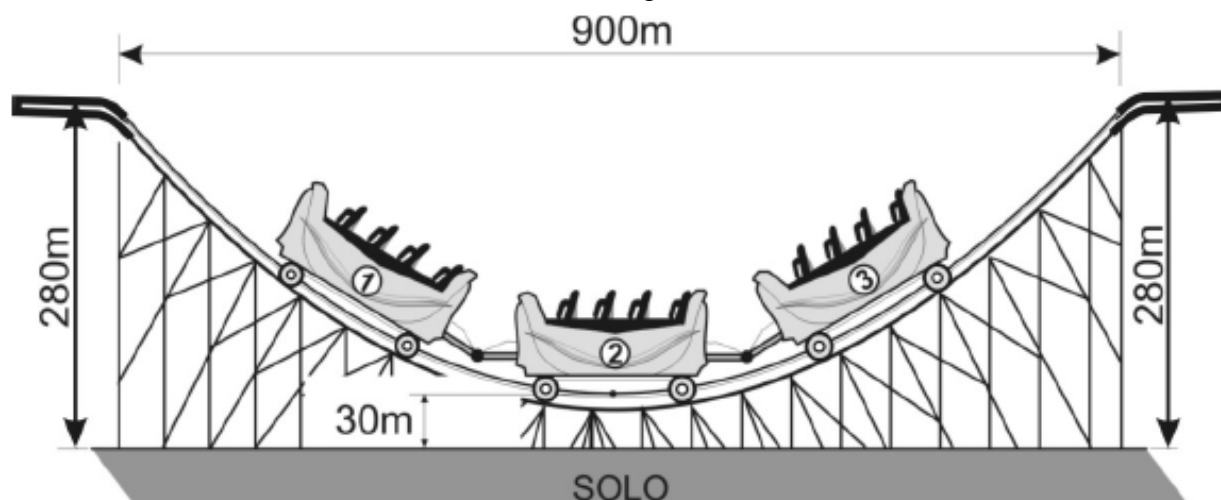
Assim, o preço de venda desses eletrodomésticos será, respectivamente, $P\cdot(100\%+20\%)=1,2\cdot P$ e $(1000-P)\cdot(100\%-10\%)=0,9\cdot(1000-P)=900-0,9P$.

A soma desses valores é o valor total da revenda. Assim, temos:

$1,2P+(900-0,9P)=1125 \Leftrightarrow 0,3P=225 \Leftrightarrow P=750$.

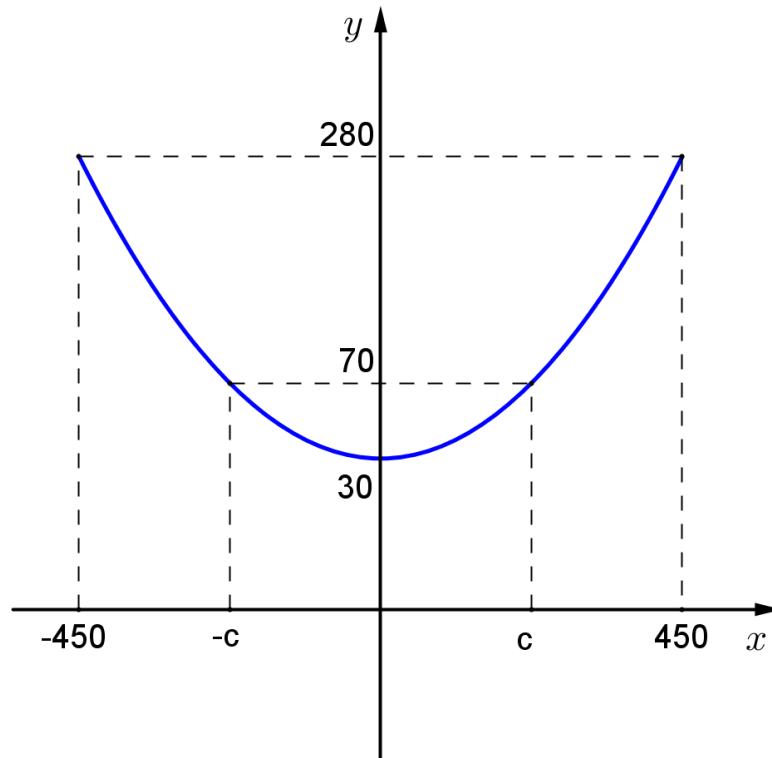
Portanto, o eletrodoméstico mais caro custa R$ 750,00 e o mais barato, R$ 250,00.

Logo, a razão pedida é $\frac{750}{250}=3$.

12) Uma das curvas radicais de uma montanha russa será construída de modo que, quando observada, perceba-se a forma de uma parábola como mostra a figura. Será possível alcançar a maior altura, 280 m do solo, em dois pontos dessa curva, distantes 900 m um do outro, e a descida atingirá o ponto mais baixo da curva a 30 metros do solo, como se vê na figura.

A distância horizontal entre o centro da roda dianteira do carrinho 1 e o centro da roda traseira do carrinho 3 quando esses centros estiverem a 70 m do solo, é

a) 200 metros.
b) 250 metros.
c) 360 metros.
d) 400 metros.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, observemos que, se o centro da roda dianteira do carrinho 1 e o centro da roda traseira do carrinho 3 estão ambos a 70 m do solo, então esses pontos são equidistantes do eixo de simetria da parábola.
Como todas as medidas são apresentadas em relação ao solo, vamos colocar ali o eixo das abscissas (Ox) e o eixo das ordenadas (Oy) passando pelo ponto de mínimo (eixo de simetria). Assim, temos a seguinte figura:

Essa parábola é o gráfico de uma função quadrática nas quais podemos identificar os pontos $(-450,280)$, $(450,280)$ e o vértice $(0,30)$.
O centro da roda dianteira do carrinho 1 e o centro da roda traseira do carrinho 3, quando esses centros estiverem a 70 m do solo, são dados pelos pontos $(-c,70)$ e $(c,70)$, respectivamente, sendo 2c a distância horizontal entre eles.
A equação de uma função quadrática de vértice $V(x_V,y_V)$ é $f(x)=a(x-x_V)^2+y_V$. Assim, a parábola da figura tem equação $f(x)=a(x-0)^2+30=ax^2+30$.
Como ela passa pelo ponto $(450,280)$, então $f(450)=280$, o que implica

$$f(450)=a\cdot 450^2+30=280 \Leftrightarrow a\cdot 450^2=250 \Leftrightarrow a=\frac{1}{810}.$$

Logo, a função quadrática é dada por $f(x)=\frac{x^2}{810}+30$.
Como essa função passa pelos pontos $(-c,70)$ e $(c,70)$, então

$$f(c)=\frac{c^2}{810}+30=70 \Leftrightarrow c^2=810\cdot 40 \Leftrightarrow c=180.$$

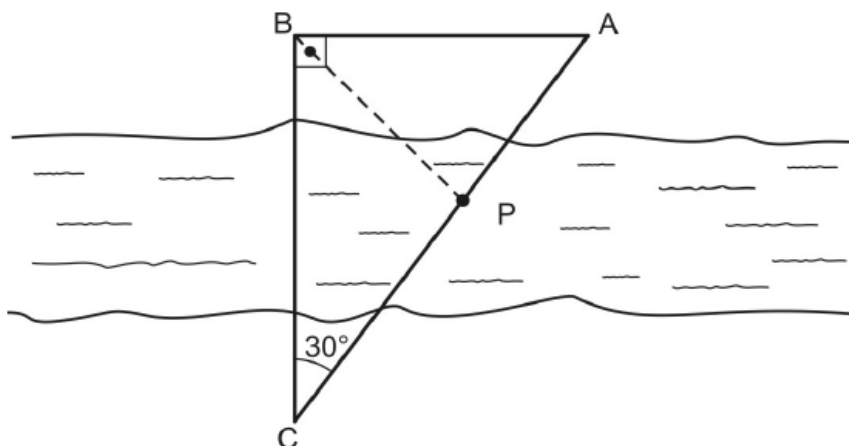
Portanto, a distância horizontal entre as rodas dos carrinhos 1 e 3 é $2c=2\cdot 180=360$ metros.

13) Duas máquinas A e B de modelos diferentes, mantendo cada qual sua velocidade de produção constante, produzem juntas n peças iguais, gastando simultaneamente 2 horas e 40 minutos. A máquina A funcionando sozinha, mantendo sua velocidade constante, produziria, em 2 horas de funcionamento, $\frac{n}{2}$ dessas peças. É correto afirmar que a máquina B, mantendo sua velocidade de produção constante, produziria também $\frac{n}{2}$ dessas peças em

a) 40 minutos.
b) 120 minutos.
c) 160 minutos.
d) 240 minutos.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A máquina A sozinha produz $\frac{n}{2}$ peças em $2h = 120\text{ min}$, portanto ela produz $\frac{n/2}{120} = \frac{n}{240}$ peças por minuto.
Vamos supor que a máquina B sozinha produza x peças por minuto.
Como as duas máquinas juntas produzem n peças em $2h\ 40\text{ min} = 160\text{ min}$, então
$\left(\frac{n}{240} + x\right) \cdot 160 = n \Leftrightarrow x = \frac{n}{160} - \frac{n}{240} = \frac{n}{480}$.
Logo, a máquina B sozinha produz $x = \frac{n}{480}$ peças por minuto. Assim, para produzir $\frac{n}{2}$ peças seriam necessários $\frac{n/2}{n/480} = 240$ minutos.

14) As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme figura abaixo.

Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta AC no ponto P. Se $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ km, então $\overline{CP}$ é, em km, igual a

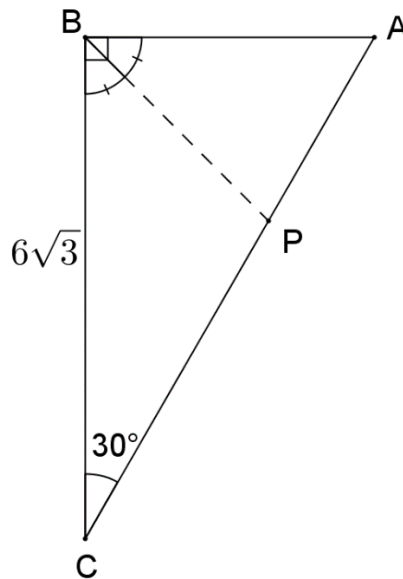
a) $6+\sqrt{3}$

b) $6\left(3-\sqrt{3}\right)$

c) $9\sqrt{3}-\sqrt{2}$

d) $9\left(\sqrt{2}-1\right)$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

No triângulo retângulo ABC, temos:

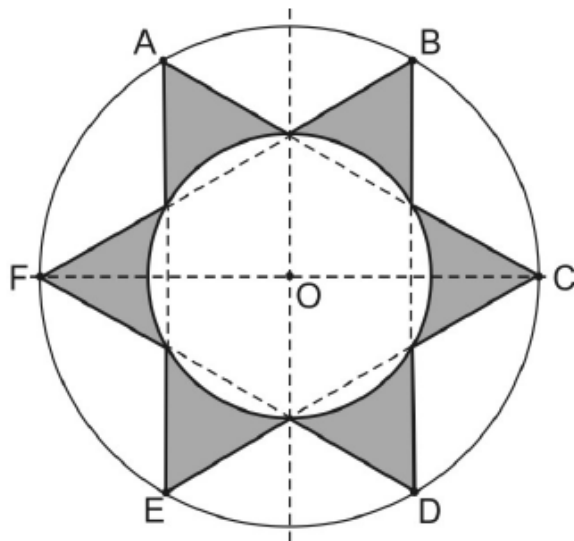
$$\cos 30° = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{AC} \Leftrightarrow AC = 12$$

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{12} \Leftrightarrow AB = 6$$

Aplicando o teorema das bissetrizes, temos:

$$\frac{CP}{BC} = \frac{AP}{AB} \Leftrightarrow \frac{CP}{6\sqrt{3}} = \frac{AP}{6} = \frac{CP+AP}{6\sqrt{3}+6} = \frac{AC}{6\sqrt{3}+6} = \frac{12}{6\sqrt{3}+6} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}-1$$

$$\Rightarrow CP = 6\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right) = 6\left(3-\sqrt{3}\right)$$

15) Na figura abaixo A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 1 metro e centro O.

Se ACE e BDF são triângulos equiláteros, então, a área da parte sombreada, nessa figura, em m^2, é igual a

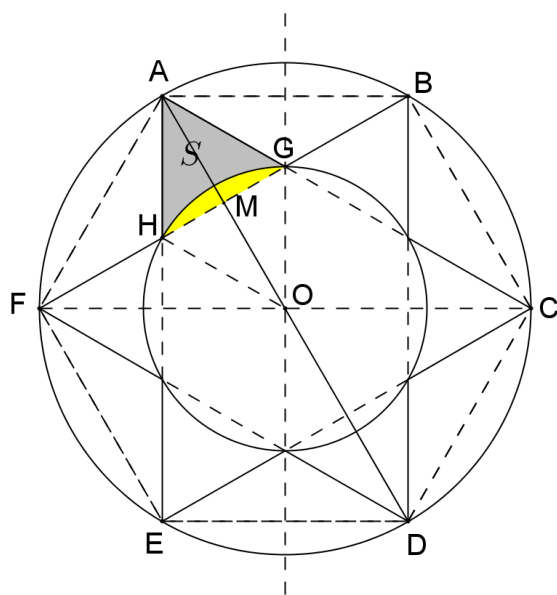
a) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\pi$

c) $\frac{\sqrt{3}-\pi}{3}$

d) $\sqrt{3}-\pi$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

As seis regiões sombreadas são congruentes entre si. Assim, basta calcular a área de uma delas e multiplicar por 6.
Seja S a área de cada uma dessas regiões (área cinza na figura acima), então S é igual à área do triângulo equilátero AGH menos a área de um segmento circular de $60°$ e raio OG (região amarela).
O segmento AM é a altura do triângulo equilátero AGH.
O triângulo BDF é um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro O e raio 1, então $AM = OM = \frac{OA}{2} = \frac{1}{2}$.

Seja L o lado do triângulo equilátero AGH, então $AM = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow L = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

O raio OG é igual ao lado do triângulo equilátero AGH, então $OG = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim, a área S é $S = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{\pi \cdot \left(\sqrt{3}/3\right)^2}{6} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}$.

Portanto, a área pedida no enunciado é $S_{total} = 6 \cdot S = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) m^2$.

16) Numa turma de x alunos, $\frac{2}{3}$ são atletas (praticam um esporte) e suas preferências por modalidades esportivas estão expressas no gráfico abaixo.

Considerando que cada um desses alunos pratica o seu esporte preferido e que este é único, analise as afirmativas abaixo, classificando-as em V (verdadeira) ou F (falsa).
( ) Metade dos atletas gosta de vôlei ou basquete.
( ) 40% dos atletas preferem futebol.
( ) O número de alunos desta turma é menor que 25.
Tem-se a sequência correta em

a) F – F – F
b) V – V – V
c) F – V – F
d) V – F – V

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO: **(O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma foi anulada da maneira como originalmente proposta.)**
A análise do gráfico mostra que o esporte preferido de 2 alunos é natação, de 8 alunos é futebol, de 4 alunos é vôlei, de 4 alunos é basquete, de 1 aluno é peteca e de 1 aluno é handebol.
Logo, o número de atletas é $2+8+4+4+1+1=20$ e a quantidade de alunos da turma é dada por $\frac{2}{3}\cdot x=20 \Leftrightarrow x=30$.
(F) Metade dos atletas gosta de vôlei ou basquete.
Apenas 8 alunos gostam de vôlei ou basquete e a metade dos atletas é 10.
(V) 40% dos atletas preferem futebol.
$40\%\cdot 20=8$
(F) O número de alunos desta turma é menor que 25.
A turma tem 30 alunos.

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2014/2015

1) Juntamente com o Governador de um Estado, foram para uma reunião 4 Prefeitos. Cada Prefeito levou 4 Secretários e cada Secretário levou 4 Vereadores. Sabendo-se que nessa reunião não houve participação de mais nenhuma pessoa, então, o número T, total de participantes, é múltiplo de
a) 7
b) 11
c) 17
d) 19

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Participaram da reunião:
Governador: 1
Prefeitos: 4
Secretários: $4 \cdot 4 = 16$
Vereadores: $16 \cdot 4 = 64$
Logo, $T = 1 + 4 + 16 + 64 = 85 = 5 \cdot 17$.

2) Uma costureira foi contratada para confeccionar 160 camisas da turma do 1º ano CPCAR 2015. Nos dois primeiros dias, ela confeccionou $\frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{N}^*)$ do total de camisas. Ela percebeu que se tivesse confeccionado 8 camisas a menos, nesses dois dias, o número de camisas confeccionadas seriam $\frac{1}{x+1}$ do total. Com base nessas informações, marque a alternativa INCORRETA.
a) Se a costureira mantiver o ritmo de trabalho dos dois dias, ela gastará menos de 7 dias para confeccionar todas as camisas.
b) Após os dois dias de trabalho, ainda faltava confeccionar mais de 100 camisas.
c) Nos dois dias de trabalho, a costureira confeccionou um quantidade de camisas que representa um número par.
d) A razão entre o número de camisas confeccionadas nos dois dias e o número de camisas que ainda faltou confeccionar, nessa ordem, é igual a $\frac{1}{3}$.

RESPOSTA: a

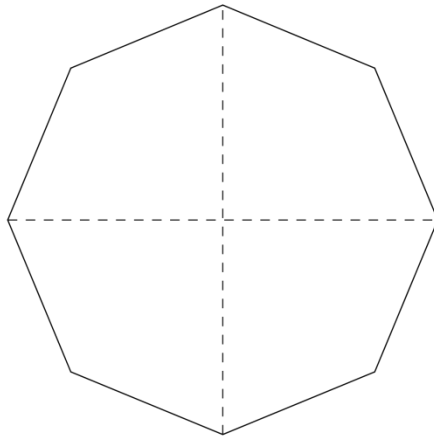
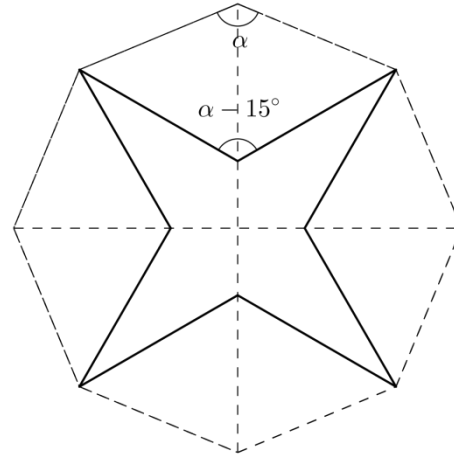
RESOLUÇÃO:
$$\frac{160}{x} - 8 = \frac{160}{x+1} \Leftrightarrow 20(x+1) - x(x+1) = 20x \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \lor x = 4$$
$$x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = 4$$
Logo, nos dois primeiros dias a costureira confeccionou $\frac{160}{4} = 40$ camisas e, mantendo o mesmo ritmo, levaria $2 \cdot 4 = 8$ dias para confeccionar todas as camisas.

a) INCORRETA: Seriam gastos 8 dias.
b) CORRETA: Faltava confeccionar $160-40=120$ camisas.
c) CORRETA: Foram confeccionadas 40 camisas, que é um número par.
d) CORRETA: A razão é $\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$.

3) Uma professora de Matemática pediu que seus alunos resolvessem uma equação do segundo grau da forma $x^2+bx+c=0$ em que $b \text{ e } c \in \mathbb{R}$. Mariana copiou o coeficiente “c” errado, obtendo $-\frac{1}{2}$ e 4 como raízes. Maria Clara copiou errado o coeficiente “b” e encontrou as raízes 1 e $-\frac{3}{2}$. Sobre a equação proposta pela professora, é correto afirmar que
a) uma das raízes é menor que -1.
b) possui duas raízes inteiras e distintas.
c) uma das raízes é maior que 3.
d) não possui raízes reais.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Supondo que a equação copiada por Mariana foi $x^2+bx+c'=0$, que possuía raízes $-\frac{1}{2}$ e 4, então a soma das raízes permite identificar o valor correto do coeficiente b. Assim, temos:
$$S=\sigma_1=\frac{-b}{1}=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}\Leftrightarrow b=-\frac{7}{2}.$$
Supondo que a equação copiada por Maria Clara foi $x^2+b'x+c=0$, que possuía raízes 1 e $-\frac{3}{2}$, então o produto das raízes permite identificar o valor correto do coeficiente c. Assim, temos:
$$P=\sigma_2=\frac{c}{1}=1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow c=-\frac{3}{2}.$$
Logo, a equação proposta era $x^2-\frac{7}{2}x-\frac{3}{2}=0$, cujas raízes são $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{73}}{4}$.
Analisando o tamanho das raízes, temos:
$$\frac{7-\sqrt{81}}{4}<\frac{7-\sqrt{73}}{4}<\frac{7-\sqrt{64}}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\frac{7-\sqrt{73}}{4}<-\frac{1}{4}$$
$$\frac{7+\sqrt{64}}{4}<\frac{7+\sqrt{73}}{4}<\frac{7+\sqrt{81}}{4}\Leftrightarrow 3,75<\frac{7+\sqrt{73}}{4}<4$$
Portanto, uma das raízes é maior do que 3.

4) Considere os dados abaixo para resolver essa questão.
$$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\qquad \text{sen}\,120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
O octógono regular tem lado medindo 1 m (figura I).

Na figura I, quatro vértices não consecutivos deslizam sobre diagonais que passam pelo centro formando um novo polígono equilátero, figura II, cuja área é, em m^2, igual a

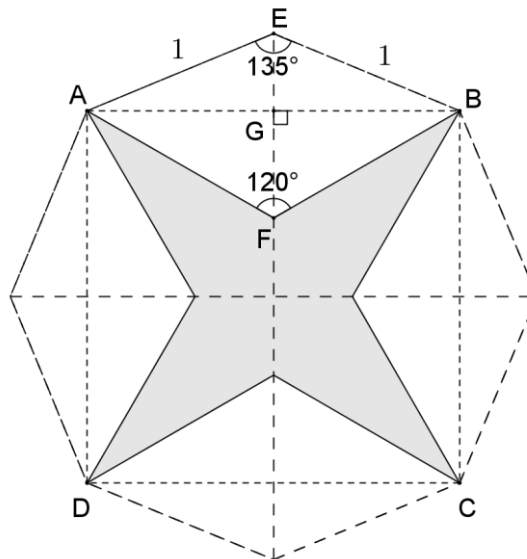
a) $\frac{6+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{6-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi modificado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta.)**

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (8-2)}{8} = 135^\circ$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABE, temos:

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 135^\circ = 2 - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2+\sqrt{2}.$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = 2+\sqrt{2}$$

Sejam $AF = FB = x$ e aplicando a lei dos cossenos no triângulo AFB, temos:

$$AB^2 = AF^2 + FB^2 - 2\cdot AF\cdot FB\cdot \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2+\sqrt{2} = x^2 + x^2 - 2\cdot x\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$$

$$S_{ABF} = \frac{AF\cdot FB}{2}\,\text{sen}120^\circ = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right).\sqrt{3}}{12}$$

$$S_{fig.II} = S_{ABCD} - 4\cdot S_{ABF} = \left(2+\sqrt{2}\right) - 4\cdot\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}}{12} =$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{3} = \frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}\ \text{m}^2$$

5) Analise cada afirmativa abaixo e classifique-a em (V) verdadeira ou (F) falsa.

( ) Se x, y e z são números reais distintos entre si, o valor de $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{(y-x)(y-z)} + \dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$ é zero.

( ) Se $p \in \mathbb{R}^*$, $q \in \mathbb{R}^*$ e $p \neq \pm q$, então, ao simplificar $\left[\dfrac{p^2+pq}{p^2-q^2}\cdot\left(\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}\right)\right]^{-1}$, obtém-se q.

( ) Se $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_-^*$, $z \in \mathbb{R}^*$, então $\dfrac{x^7y^5}{z^{30}} < 0$.

A sequência correta é
a) V – V – V
b) V – F – V
c) F – F – V
d) V – V – F

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi modificado, a fim de corrigir uma pequena impropriedade na segunda afirmativa.)**

(V) Se x, y e z são números reais distintos entre si, então os denominadores da expressão são não nulos. Assim, temos: $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{(y-x)(y-z)} + \dfrac{1}{(z-x)(z-y)} = \dfrac{(y-z)+(z-x)+(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = 0$

(V) Se $p \in \mathbb{R}^*$, $q \in \mathbb{R}^*$ e $p \neq \pm q$, então os denominadores da expressão são não nulos. Assim, temos:

$$\left[\frac{p^2+pq}{p^2-q^2}\cdot\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{p(p+q)}{(p+q)(p-q)}\cdot\left(\frac{p-q}{pq}\right)\right]^{-1} = \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} = q$$

(V) Se $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, $y \in \mathbb{R}_{-}^{*}$, $z \in \mathbb{R}^{*}$, então $x^7 > 0$, $y^5 < 0$ e $z^{30} > 0$. Assim, temos: $\frac{x^7 y^5}{z^{30}} < 0$.

6) Considere $p \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ e a equação $\sqrt{x-p} - \sqrt{p} + \sqrt{2x-p} = 0$ na variável x. Sobre o conjunto solução dessa equação, pode-se afirmar que
a) possui um único elemento positivo.
b) não possui elemento.
c) possui dois elementos positivos.
d) possui dois elementos de sinais opostos.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{x-p} - \sqrt{p} + \sqrt{2x-p} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-p} + \sqrt{2x-p} = \sqrt{p}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-p} + \sqrt{2x-p}\right)^2 = \left(\sqrt{p}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x-p) + 2\sqrt{(x-p)(2x-p)} + (2x-p) = p \ \wedge \ x-p \geq 0 \ \wedge \ 2x-p \geq 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-p)(2x-p)} = 3(p-x) \ \wedge \ x \geq p$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{(x-p)(2x-p)}\right)^2 = \left(3(p-x)\right)^2 \ \wedge \ x \geq p \ \wedge \ p-x \geq 0$

$\Leftrightarrow 4(x-p)(2x-p) = 9(p-x)^2 \ \wedge \ x \geq p \ \wedge \ x \leq p$

$\Leftrightarrow x = p$

Observe que $x = p$ satisfaz a equação inicial e a última, que resulta $0 = 0$. Portanto, o conjunto solução é $S = \{p\}$ que possui um único elemento positivo.

7) Numa corrida utiliza-se uma pista com 4 raias. Essa pista é composta por semicircunferências e trechos retilíneos, como mostra a figura abaixo.

Sabe-se que o comprimento de cada trecho retilíneo da pista e de cada semicircunferência da raia interna (QR e SP) é 100 metros e que a largura de cada raia é de 1 metro. Se cada atleta, A_1, A_2, A_3 e A_4, deve dar uma volta no sentido anti-horário, correndo sobre as linhas em que estão posicionados, com chegada na linha BQ, pode-se afirmar então que, quando ainda na posição de largada, o atleta A_4 deverá estar à frente do atleta A_1

a) 6π metros.
b) 8π metros.
c) 10π metros.
d) 12π metros.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Como as semicircunferências QR e SP têm comprimento 100 m, então $2\pi r = 200$.
O comprimento da pista de A_4 (uma volta completa) é
$200 + 2\pi \cdot (r+3) = 200 + 2\pi r + 6\pi = 200 + 200 + 6\pi = (400 + 6\pi)\text{ m}$.
Como a pista da raia interna (percorrida por A_1) mede 400 m, então o atleta A_4 deve estar $(400+6\pi) - 400 = 6\pi\text{ m}$ à frente de A_1.

8) Analise as afirmativas seguintes e classifique cada uma em (V) verdadeira ou (F) falsa.

I. Se $A = \dfrac{5 - 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5 - 5^{\frac{1}{2}}}$, então $A \in \{(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Z})\}$.

II. O valor da expressão $\left[\frac{(0,001)^4 \cdot 100^7}{10^5}\right] \cdot (0,1)^{-4}$ é $100^{\frac{1}{2}}$.

III. Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, uma forma simplificada para a expressão $\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$ é a^{-4}.

A sequência correta é
a) V – V – V
b) V – V – F
c) V – F – F
d) F – V – F

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
I. V

$$A = \frac{5 - 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5 - 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{25 + 5\sqrt{5} - 25\sqrt{5} - 25}{25 - 5} = \frac{-20\sqrt{5}}{20} = -\sqrt{5}$$

Assim, $A = -\sqrt{5}$ é um número irracional negativo, ou seja, $A \in \{(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Z})\} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathrm{I}$.
II. V

$$\left[\frac{(0,001)^4 \cdot 100^7}{10^5}\right] \cdot (0,1)^{-4} = \left[\frac{(10^{-3})^4 \cdot (10^2)^7}{10^5}\right] \cdot (10^{-1})^{-4} = \left[\frac{10^{-12} \cdot 10^{14}}{10^5}\right] \cdot 10^4 = \left[\frac{10^2}{10^5}\right] \cdot 10^4 =$$

$$= \frac{1}{10^3} \cdot 10^4 = 10 = 100^{\frac{1}{2}}$$

III. F

$$\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}} = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}} \neq a^{-4} \text{ (exceto para } a = 1\text{).}$$

9) Bhaskara vende bolos na feira. Num certo dia, ele atendeu três fregueses somente. Euler, o primeiro freguês, comprou, do total de bolos da banca, metade dos bolos mais meio bolo. Tales, o segundo freguês, também comprou do total de bolos, que havia na banca, metade dos bolos mais meio bolo. Por fim, Cartesiano, o terceiro freguês, também comprou do total de bolos, que havia na banca, metade dos bolos mais meio bolo. Sabendo-se que, nesse dia, sobraram 10 bolos na banca de Bhaskara, e que cada bolo foi vendido por R$ 6,00, então
a) Bhaskara, com a venda de bolos, recebeu mais de 500 reais.
b) Tales gastou com os bolos a metade do que Cartesiano gastou.
c) Após Euler comprar os bolos, sobraram na banca menos de 40 bolos.
d) A soma da quantidade de bolos comprados por Euler e Cartesiano, juntos, é um número divisível por 5.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Supondo que haja N bolos na banca e que, após alguém comprar metade dos bolos mais meio bolo, restem n bolos, então $N-\left(\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)=n \Leftrightarrow \frac{N-1}{2}=n \Leftrightarrow N=2n+1$ e foram comprados $(n+1)$ bolos.
Como, ao final, sobraram 10 bolos, então Cartesiano comprou $10+1=11$ bolos a $11\cdot 6=66$ reais e havia $2\cdot 10+1=21$ bolos na banca antes da sua compra e após a compra de Tales.
Tales comprou $21+1=22$ bolos a $22\cdot 6=132$ reais e havia $2\cdot 21+1=43$ bolos na banca antes da sua compra e após a compra de Euler.
Euler comprou $43+1=44$ bolos a $44\cdot 6=264$ reais e havia $2\cdot 43+1=87$ bolos na banca antes da sua compra (situação inicial).
Portanto, Bhaskara tinha, inicialmente, 87 bolos e vendeu no total 77 bolos a $77\cdot 6=462$ reais.
a) F: Bhaskara recebeu apenas 464 reais.
b) F: Tales gastou 132 reais que é o dobro (e não a metade) dos 66 reais gastos por Cartesiano.
c) F: Após Euler comprar os bolos, sobraram $87-44=43$.
d) V: A quantidade de bolos comprados por Euler e Cartesiano, juntos, foi $44+11=55$ que é um número divisível por 5.

10) Numa fábrica de sucos há três reservatórios R_1, R_2 e R_3. O reservatório R_3 comporta $\frac{3}{2}$ da capacidade de R_1 e R_2 juntos. Os reservatórios R_1 e R_2 estão cheios de uma mistura de suco concentrado de uvas e de água. A razão entre o volume de suco concentrado de uvas e o volume de água no reservatório R_1 é 8 para 1 e no reservatório R_2 é 10 para 1. As misturas dos dois reservatórios R_1 e R_2 serão despejadas no reservatório R_3. Com base nessas informações, analise as afirmativas abaixo.
I. A razão do volume de suco concentrado de uvas para o de água no reservatório R_3 é $\frac{87}{10}$.
II. Se em R_1 há 20 litros de água e em R_2 há 22 litros de água, então a capacidade de R_3 é menor que 600 litros.
III. Na mistura do reservatório R_3 haverá menos de 11% de água.
São FALSAS
a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) I, II e III.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Supondo que no reservatório R_1 o volume de suco concentrado de uva seja 8x e o de água x, e que no reservatório R_2 o volume de suco de uva concentrado seja 10y e o de água y.
Assim, a capacidade do reservatório R_3 é $\frac{3}{2}\cdot(9x+11y)$.
I. FALSA

A razão do volume de suco concentrado de uvas para o de água no reservatório R_3 é $\frac{8x+10y}{x+y}=8+\frac{2y}{x+y}=8+\frac{2}{\left(\frac{x}{y}\right)+1}$, ou seja, depende da razão $\frac{x}{y}$.

II. FALSA

Se em R_1 há 20 litros de água, então $x=20$, e em R_2 há 22 litros de água, então $y=22$. Logo, a capacidade de R_3 é $\frac{3}{2}\cdot(9x+11y)=\frac{3}{2}\cdot(9\cdot 20+11\cdot 22)=270+363=633$ litros que é maior que 600 litros.

III. FALSA

Na mistura do reservatório R_3 a concentração de água é $\frac{x+y}{9x+11y}$. Analisando essa razão temos:

$$\frac{x+y}{9x+11y}=\frac{1}{11}\cdot\frac{11x+11y}{9x+11y}=\frac{1}{11}\cdot\left(1+\frac{2x}{9x+11y}\right)=\frac{1}{11}\left(1+\frac{2}{9+11\cdot\left(\frac{y}{x}\right)}\right)<\frac{1}{11}\left(1+\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{9}$$

Assim, a concentração de água em R_3 está entre $\frac{1}{11}=9,\overline{09}\%$ e $\frac{1}{9}=11,\overline{1}\%$, dependendo da razão $\frac{y}{x}$.

Note que se $\frac{y}{x}=\frac{1}{110}$, a concentração é $\frac{1}{11}\left(1+\frac{2}{9+\frac{1}{10}}\right)=\frac{1}{11}\cdot\left(1+\frac{20}{91}\right)=\frac{1}{11}\cdot\frac{111}{91}\approx 11,09\%$, que é maior que 11%.

11) Um escritório de engenharia foi contratado para desenhar um projeto de construção de uma praça. Para a execução do projeto, deverão ser atendidas as seguintes condições:

- a praça será em forma de um triângulo escaleno;
- as medidas dos lados da praça são números inteiros;
- a medida do maior lado é o dobro da medida do menor lado;
- o perímetro da praça é 120 metros.

O número de projetos que poderão ser executados, atendendo às condições acima, é x.

O número x é

a) múltiplo de 7.
b) primo maior que 3.
c) divisor de 27.
d) quadrado perfeito menor que 20.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Sejam $a<b<2a$, onde $a,b\in\mathbb{Z}_+^*$, os lados do triângulo escaleno. Note que esses valores satisfazem a desigualdade triangular, pois $2a<a+b$.

Como o perímetro da praça é 120 m, temos: $2p=a+b+2a=3a+b=120$.

Analisado o perímetro à luz da desigualdade $a<b<2a$, temos:

$a<b\Rightarrow 3a+b>4a\Rightarrow 120>4a\Leftrightarrow a<30$

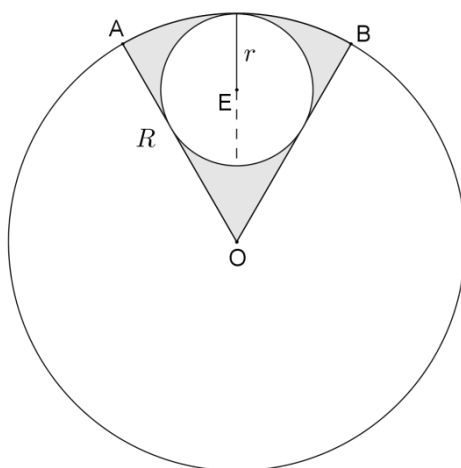
$b < 2a \Rightarrow 3a + b < 3a + 2a = 5a \Rightarrow 120 < 5a \Leftrightarrow a > 24$.

Portanto, $24 < a < 30$ e $a \in \{25, 26, 27, 28, 29\}$

As medidas dos lados dos possíveis triângulos são dadas pelas ternas ordenadas $(25, 45, 50)$, $(26, 42, 52)$, $(27, 39, 54)$, $(28, 36, 56)$ e $(29, 33, 58)$.

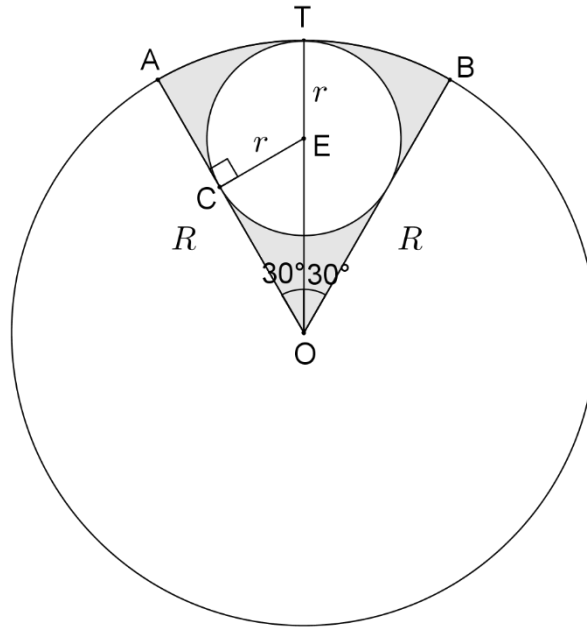
Assim, $x = 5$ que é primo e maior que 3.

12) Considere a figura abaixo em que:

- a circunferência de raio R e centro O e a circunferência de raio r e centro E são tangentes interiores;
- a circunferência de raio r é tangente aos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$;
- $r = 5$ cm e $\text{med}(A\hat{O}B) = 60^\circ$

A área da região sombreada nessa figura é $\frac{a}{b}\pi\ \text{cm}^2$. Se a e b são primos entre si, então $(a - b)$ é igual a

a) 23
b) 22
c) 21
d) 20

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Na figura, $OE = OT - ET = R - r$. No triângulo OCE, temos:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{CE}{OE} = \frac{r}{R-r} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R = 3r.$$

A área da região sombreada S é igual à área do setor circular de 60° e raio R menos a área do círculo de raio r.

$$S = S_{\text{setor } 60^\circ} - S_{\text{circ. r}} = \frac{\pi \cdot R^2}{6} - \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot (3r)^2}{6} - \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} = \frac{25}{2}\pi \text{ cm}^2.$$

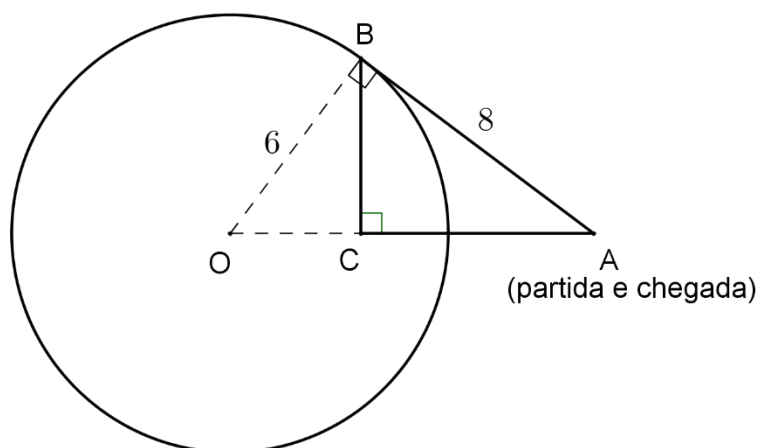
Assim, $a = 25$, $b = 2$ e $a - b = 23$.

13) Uma das provas de uma gincana consiste numa corrida realizada segundo o percurso descrito na figura abaixo.

Um atleta parte do ponto A, perfazendo 8 km em direção ao ponto B que está sobre a circunferência de centro O e raio 6 km, percorrendo-a uma vez. Chegando novamente em B, segue em direção ao ponto C e, finalmente, vai em direção ao ponto A.

Sabendo-se que $\overline{AB}$ é tangente à circunferência e considerando $\pi = 3{,}14$, pode-se afirmar que, o percurso dessa prova, em quilômetros, está compreendido entre
a) 56 e 57.
b) 57 e 58.
c) 58 e 59.
d) 59 e 60.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Como AB é tangente à circunferência, então o triângulo ABO é retângulo.
No triângulo retângulo ABO, temos:

$$OA^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Leftrightarrow OA = 10$$
$$OA \cdot BC = OB \cdot AB \Leftrightarrow 10 \cdot BC = 6 \cdot 8 \Leftrightarrow BC = 4{,}8$$
$$AB^2 = OA \cdot CA \Leftrightarrow 8^2 = 10 \cdot CA \Leftrightarrow CA = 6{,}4$$

O percurso da prova é dado por

$$AB + 2p_{circ.} + BC + CA = 8 + 2\pi \cdot 6 + 4{,}8 + 6{,}4 = 19{,}2 + 12\pi = 19{,}2 + 12 \cdot 3{,}14 = 56{,}88 \text{ km.}$$

14) Um professor de Matemática, querendo incentivar o estudo da geometria, propôs uma lista com uma quantidade de problemas igual a $0{,}\overline{6}$ de $\frac{1}{5}$ de 210. O professor combinou que, ao primeiro aluno que devolvesse a lista resolvida, seriam ofertados 4 chocolates por problema acertado, mas seriam recolhidos 3 chocolates por problema errado. O primeiro aluno que entregou a lista de problemas resolvidos, após realizada a correção, ficou com 7 chocolates. Esse aluno errou y problemas. O número de divisores naturais de y é
a) 2
b) 4
c) 6
d) 8

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

A quantidade de problemas da lista é $0,\bar{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot 210=\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{5}\cdot 210=28$.

Se o aluno errou y problemas, então ele acertou $(28-y)$. Assim, a quantidade de chocolates é determinada por $4\cdot(28-y)-3\cdot y=7 \Leftrightarrow 7y=105 \Leftrightarrow y=15$.

O número de divisores naturais de $y=15=3\cdot 5$ é $d(15)=(1+1)\cdot(1+1)=4$.

15) Uma pessoa possui a quantia de x reais e pretende comprar um sítio. O valor x corresponde a 30% do valor do sítio. Se essa pessoa vender o apartamento em que atualmente reside e juntar ao valor x, ela conseguirá pagar o sítio e, ainda, lhe sobrarão R$ 15.000,00. Até que seja efetuada a venda do apartamento que reside, essa pessoa conseguiu com um amigo um empréstimo, sem juros, de R$ 60.000,00. Assim, juntos os x reais com os R$ 60.000,00 e efetuou parte do pagamento, ficando devendo $\frac{2}{5}$ do valor todas do sítio. Com base nessas informações, marque a alternativa FALSA.

a) O valor do sítio é maior que R$ 180.000,00.
b) Com a quantia x pode-se comprar um carro cujo valor é R$ 55.000,00 e ainda sobra dinheiro.
c) A quantia de x reais mais os R$ 60.000,00 de empréstimo somam menos de R$130.000,00.
d) O valor do apartamento onde a pessoa reside corresponde a $\frac{3}{4}$ do valor do sítio.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Seja y o valor do sítio, então $x=30\%\cdot y=0,3y$.
Seja z o valor do apartamento onde a pessoa reside, então $z+x=y+15000$.
Se pagando x reais mais R$ 60.000,00 ele ainda fica devendo $\frac{2}{5}$ do valor do sítio, então esse valor corresponde a $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ do valor do sítio. Assim, temos: $x+60000=\frac{3}{5}\cdot y$.

As três igualdades obtidas formam o sistema: $\begin{cases} x=0,3y & (i) \\ z+x=y+15000 & (ii) \\ x+60000=\frac{3}{5}y & (iii) \end{cases}$.

$(i)\wedge(iii): 0,3y+60000=0,6y \Leftrightarrow 0,3y=60000 \Leftrightarrow y=200000$.
$(i): x=0,3\cdot 200000=60000$
$(ii): z+60000=200000+15000 \Leftrightarrow z=155000$
a) VERDADEIRA
O valor do sítio é R$ 200.000,00.
b) VERDADEIRA
O valor de x é R$ 60.000,00 que é maior do que R$ 55.000,00.
c) VERDADEIRA
A quantia de x reais mais os R$ 60.000,00 de empréstimo somam R$ 120.000,00.
d) FALSA

O valor do apartamento em que a pessoa reside é R$155.000,00 que é diferente de $\frac{3}{4} \cdot 200000 = 150000$ reais.

16) Fábio, um adolescente que gosta da disciplina de matemática, usou seus conhecimentos de geometria plana e funções e projetou um brinquedo, conforme modelo matemático descrito abaixo. Nesse brinquedo lançam-se bolinhas a partir do ponto P, em direção ao ponto U. Quando a bolinha alcança o ponto U, ela cai para dentro de um cano.

- $\overset{\frown}{PQ}$ representa $\frac{1}{4}$ de circunferência cujo raio mede 30 cm;
- $\overset{\frown}{QT}$ representa uma semicircunferência de centro em R e cujo raio mede 20 cm;
- a trajetória de T até V representa um arco de parábola cujo eixo de simetria é OW;
- o solo e o eixo de simetria correspondem, respectivamente, aos eixos $\overleftrightarrow{Ox}$ e $\overleftrightarrow{Oy}$ do sistema cartesiano ortogonal;
- $\overline{VA} = \overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{UV} = 10 \text{ cm}$;
- $\overline{UV}$ é paralelo ao solo;
- $\overline{AW} = \overline{ON} = 10 \text{ cm}$;
- a distância de Z ao eixo de simetria é 5 cm; e
- considere $\pi = 3$.

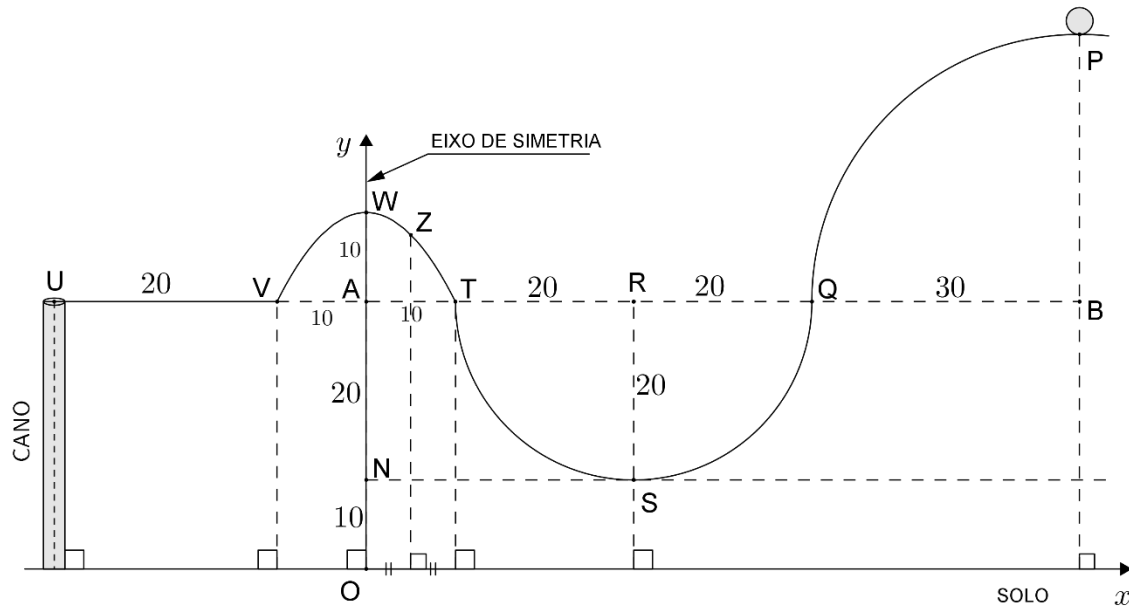
Com base em todas as informações acima, analise as afirmativas, classificando-as em (V) verdadeira ou (F) falsa.

( ) Após um lançamento, quando a bolinha estiver no ponto Z, ela estará a mais de 37 cm do solo.
( ) De Q até S, a bolinha percorre exatamente 20 cm.
( ) Após um lançamento, se a bolinha está sobre o arco de parábola a 38,4 cm do solo, então também estará a exatamente 4 cm do eixo de simetria.

A sequência correta é
a) F – F – V
b) V – F – F
c) V – V – F

d) V – F – V

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

O arco de parábola passa pelos pontos $T(10,30)$, $V(-10,30)$ e $W(0,40)$, então

$f(x) = a \cdot (x+10)(x-10) + 30$

$f(0) = a \cdot (0+10) \cdot (0-10) + 30 = 40 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{10}$

Portanto, a função quadrática é dada por $f(x) = -\frac{1}{10}(x+10)(x-10) + 30$.

(V) Após um lançamento, quando a bolinha estiver no ponto Z, ela estará a mais de 37 cm do solo.

O ponto Z possui abscissa $x = -5$, então $f(-5) = -\frac{1}{10} \cdot (-5+10)(-5-10) + 30 = 37,5$.

(F) De Q até S, a bolinha percorre exatamente 20 cm.

De Q até S, a bolinha percorre $\frac{2\pi \cdot 20}{4} = 10\pi \approx 10 \cdot 3 = 30 \text{ cm}$.

(V) Após um lançamento, se a bolinha está sobre o arco de parábola a 38,4 cm do solo, então também estará a exatamente 4 cm do eixo de simetria.

Se a bolinha está sobre o arco de parábola a 38,4 cm do solo, então esse ponto tem ordenada $y_0 = 38,4$. Supondo que esse ponto possui abscissa x_0, então $f(x_0) = -\frac{1}{10}\left(x_0^2 - 100\right) + 30 = 38,4 \Leftrightarrow x_0^2 = 16 \Leftrightarrow x_0 = \pm 4$. Portanto, esse ponto estará a exatamente 4 cm do eixo de simetria.

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2013/2014

1) Há dois anos Letícia tinha $\frac{1}{6}$ da idade que seu pai tem hoje. Daqui a um ano Letícia terá $\frac{1}{4}$ da idade atual de sua mãe. Hoje a soma das idades dos três é igual ao menor número natural de três algarismos distintos divisível por 3. Os irmãos gêmeos de Letícia têm hoje a metade da idade que Letícia terá daqui a oito anos. Atualmente, a soma das idades dos três irmãos é
a) 24
b) 26
c) 28
d) 30

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Sejam L, P, M e I as idades atuais de Letícia, seu pai, sua mãe e seus irmãos gêmeos, respectivamente. As informações do enunciado podem ser equacionadas da seguinte forma:

$$L-2=\frac{1}{6}P \Leftrightarrow P=6L-12$$

$$L+1=\frac{1}{4}M \Leftrightarrow M=4L+4$$

$$L+P+M=102 \Rightarrow L+(6L-12)+(4L+4)=102 \Leftrightarrow L=10$$

Note que 102 é o menor número natural de três algarismos distintos e divisível por 3.

$$I=\frac{1}{2}(L+8)=\frac{1}{2}(10+8)=9$$

Portanto, a soma das idades atuais dos três irmãos é $L+I+I=10+9+9=28$.

2) Considere as expressões abaixo em que $a \neq b$

$$P=\frac{a^3-b^3}{a^2\sqrt{a}-\sqrt{b}\,a^2+ba\sqrt{a}-b\sqrt{b}\,a+b^2\sqrt{a}-b^2\sqrt{b}}$$

$$Q=\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$$

Assim, tem-se $\frac{Q}{P}$ igual a

a) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
d) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$P = \frac{a^3 - b^3}{a^2\sqrt{a} - \sqrt{b}\,a^2 + ba\sqrt{a} - b\sqrt{b}\,a + b^2\sqrt{a} - b^2\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + ab(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + b^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})} =$$

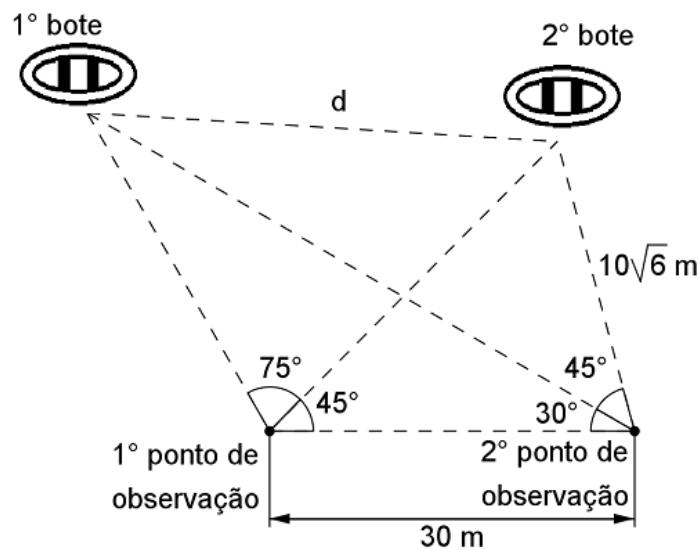
$$= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a^2+ab+b^2)} = \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$Q = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} = \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{a^2(a+b) + b^2(a+b)} = \frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2+b^2)} = a - b$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{P} = \frac{a-b}{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)} = (a-b\cdot)\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

3) Dois botes estão no mar a uma distância d um do outro. Um observador, situado na praia, observava-os, calculando distâncias e ângulos em dois pontos de observação, como no esboço abaixo.

A distância d entre os botes, em metros, é igual a

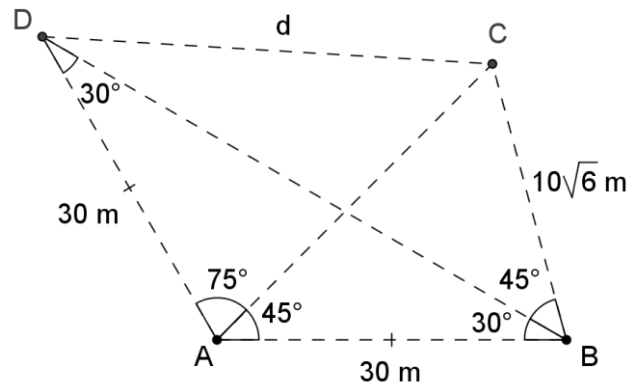
Dado: $\text{sen}120^\circ = \cos 30^\circ$

a) $10\sqrt{15}$

b) $15(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

c) $10(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

d) $15(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

No triângulo ABD, temos: $A\hat{D}B = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) - 30^\circ = 30^\circ$. Portanto, o triângulo ABD é isósceles.

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABD , temos:

$$\frac{AB}{\text{sen}\,30^\circ} = \frac{BD}{\text{sen}\,120^\circ} \Leftrightarrow \frac{30}{\frac{1}{2}} = \frac{BD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow BD = 30\sqrt{3}$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo BCD, temos:

$$d^2 = (30\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{6})^2 - 2(30\sqrt{3})(10\sqrt{6})\cos 45^\circ = 2700 + 600 - 2 \cdot 900\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1500$$

$$\Leftrightarrow d = 10\sqrt{15}\text{ m}$$

4) Leila foi avisada em dezembro de 2012, que a mensalidade escolar de seus filhos para o ano de 2013 teria um aumento de 80%.

Ela não concordou com o aumento e procurou o PROCON que, após analisar o caso, determinou que a escola reduzisse este último valor em 30%.

A escola acatou a decisão do PROCON. Além disso, como Leila tem 3 filhos matriculados, a escola decidiu lhe dar 10% de desconto nas mensalidades de cada um de seus filhos.

Dessa forma, o aumento da mensalidade escolar dos filhos de Leila do ano de 2012 para o ano de 2013 passou a ser, em percentual, um número compreendido entre

a) 10 e 13
b) 13 e 16
c) 16 e 19
d) 19 e 22

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Seja M a mensalidade inicial, então, após o aumento de 80%, a mensalidade resultante foi $M \cdot (1 + 80\%) = 1,8 \cdot M$.

A redução de 30% sobre esse valor resulta uma mensalidade de $1,8 \cdot M \cdot (1 - 30\%) = 1,8 \cdot M \cdot 0,7 = 1,26 \cdot M$.

Com o desconto de 10%, a mensalidade final será $1,26 \cdot M \cdot (1-10\%) = 1,26 \cdot M \cdot 0,9 = 1,134 \cdot M$, ou seja, o aumento de 2012 para 2013 foi de $(1,134-1) \cdot 100\% = 13,4\%$, que é um percentual compreendido entre 13 e 16.

5) Uma confecção de roupas foi contratada para confeccionar os agasalhos de todos os alunos do 1° ano CPCAR para o ano de 2014.
O prazo que a confecção teve para a execução do trabalho foi de 4 dias. Para isso, o gerente da confecção utilizou 6 máquinas tipo α, cada uma trabalhando 6 horas por dia e todas com a mesma produtividade.
Ao final do terceiro dia, o gerente da fábrica verificou que somente $0,\overline{3}$ de $\frac{9}{4}$ dos agasalhos estavam prontos.
Sendo assim, substituiu, no início do quarto dia, as máquinas do tipo α por 3 outras do tipo β, cada uma trabalhando 8 horas por dia, e cada uma delas com o triplo da produtividade de uma máquina tipo α.
Se as 3 máquinas tipo β tivessem sido utilizadas desde o início, o serviço teria sido realizado em
a) 20 horas
b) 16 horas
c) 12 horas
d) 10 horas

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
As 6 máquinas do tipo α trabalhando 6 horas por dia durante 3 dias totalizam $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ horas de trabalho e produzem $0,\overline{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$ dos agasalhos. Logo, cada máquina do tipo α executa $\frac{\frac{3}{4}}{108} = \frac{1}{144}$ dos agasalhos por hora.
Cada máquina do tipo β, que tem o triplo da produtividade da máquina do tipo α, faz $\frac{1}{144} \cdot 3 = \frac{1}{48}$ dos agasalhos por hora, ou seja, demora 48 horas para produzir todos os agasalhos.
Logo, 3 máquinas do tipo β fazem todos os agasalhos em $\frac{48}{3} = 16$ horas.

6) Três pessoas, X, Y e Z, tinham a mesma quantia em reais.
X, de início, gastou 99 reais. Y deu uma parte de sua quantia para Z, e o dobro dessa parte, para X.
Com essas novas quantias em reais, as três pessoas saíram para as compras e X gastou o quadrado da diferença entre 4 reais e o que Y havia dado para Z.
Y e Z gastaram, cada uma, a diferença entre o quadrado do que Y havia dado a Z e 4 reais.
Após esses gastos, a soma das quantias de X e Z era igual ao dobro da de Y.
É correto afirmar que X gastou no total, em reais.
a) 90

b) 99
c) 108
d) 118

RESPOSTA: c

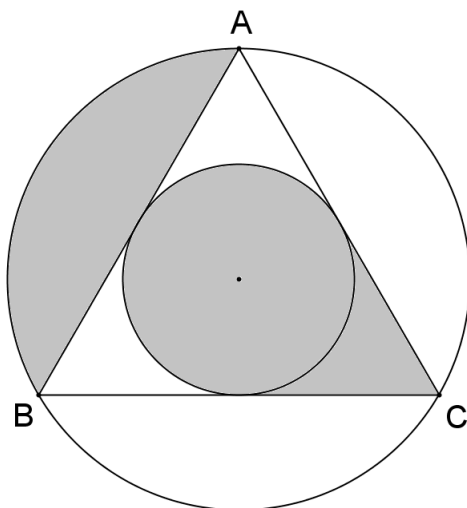
RESOLUÇÃO:
Seja A reais a quantia inicial de X, Y e Z, e B reais a quantia que Y deu para Z na primeira etapa.
Inicialmente, temos: X gastou 99 reais, Y deu B reais para Z, e Y deu 2B reais para X. As quantias de cada uma das pessoas, após essa etapa, são:
$X:\ A-99+2B$
$Y:\ A-B-2B=A-3B$
$Z:\ A+B$
Depois X gastou $(4-B)^2$, Y e Z gastaram, cada uma, B^2-4. As quantias de cada uma das pessoas, após essa etapa, são:
$X:\ A-99+2B-(4-B)^2=A-99+2B-16+8B-B^2=A+10B-B^2-115$
$Y:\ A-3B-(B^2-4)=A-3B-B^2+4$
$Z:\ A+B-(B^2-4)=A+B-B^2+4$
Após esses gastos, a soma das quantias de X e Z era igual ao dobro da de Y, então, temos:
$(A+10B-B^2-115)+(A+B-B^2+4)=2\cdot(A-3B-B^2+4)$
$\Leftrightarrow 2A+11B-2B^2-111=2A-6B-2B^2+8 \Leftrightarrow 17B=119 \Leftrightarrow B=7$
Portanto, o gasto total de X foi $99+(4-B)^2=99+(4-7)^2=108$.

7) O número de alunos do CPCAR que se inscreveu para um desafio de matemática na EPCAR, realizado anualmente, foi, nos anos de 2009, 2010 e 2012, respectivamente igual a 5, 6 e 20.
Os professores da EPCAR perceberam que o número de alunos que se inscreveu para esse desafio cresceu, de maneira que a diferença entre o número de alunos dos anos $(x+2)$ e x é diretamente proporcional ao número de alunos do ano $(x+1)$.
Se y é o número de alunos do CPCAR que se inscreveu nesse desafio em 2011, então a soma dos divisores naturais de y é
a) 28
b) 26
c) 24
d) 20

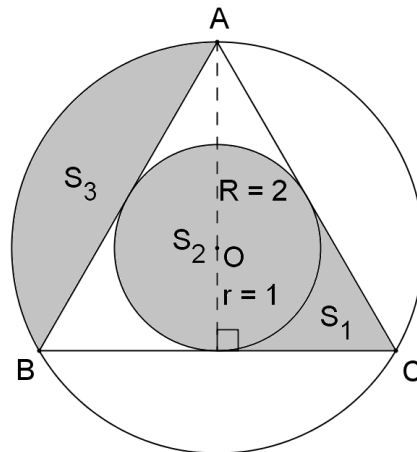
RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Como a diferença entre o número de alunos dos anos $(x+2)$ e x é diretamente proporcional ao número de alunos do ano $(x+1)$, podemos afirmar que "a diferença entre o número de alunos dos anos 2011 e 2009 está para o número de alunos do ano de 2010, assim como a diferença entre o número de alunos dos anos de 2012 e 2010 está para o número de alunos de 2011." Assim, temos:
$$\frac{y-5}{6}=\frac{20-6}{y} \Leftrightarrow y^2-5y-84=0 \Leftrightarrow y=-7\ (\text{não convém}) \vee\ y=12$$

Portanto, a soma dos divisores naturais de $y = 12 = 2^2 \cdot 3$ é $S(12) = (1+2+2^2)\cdot(1+3) = 28$.

8) Considere o triângulo ABC, inscrito na circunferência de centro O abaixo, em que os menores arcos AB, BC e AC são congruentes.

Se a circunferência menor, inscrita ao triângulo ABC, tem raio igual a 1 cm, então o número que representa a área sombreada, em cm^2, é igual ao número que representa
a) o comprimento do círculo menor, em cm.
b) a área do círculo maior, em cm^2.
c) o comprimento do círculo maior, em cm.
d) o dobro da área do triângulo ABC, em cm^2.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Seja O a centro da circunferência inscrita no triângulo ABC.
Como os menores arcos AB, BC e AC são congruentes, então o ΔABC é um triângulo equilátero.
A circunferência inscrita no triângulo equilátero ABC tem raio $r = 1$, então a circunferência circunscrita tem raio $R = 2r = 2 \cdot 1 = 2$ (note que isso é uma consequência imediata da coincidência entre o incentro, o circuncentro e o baricentro do triângulo equilátero).

A região S_1 é igual a um terço da diferença entre a área do triângulo ABC e da circunferência inscrita, ou seja, $S_1 = \frac{1}{3}\left(S_{ABC} - \pi \cdot r^2\right) = \frac{1}{3}\left(S_{ABC} - \pi \cdot 1^2\right) = \frac{S_{ABC}}{3} - \frac{\pi}{3}$.

A área da região S_2 é a área da circunferência inscrita, ou seja, $S_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$.

A área da região S_3 é igual a um terço da diferença entre à área da circunferência circunscrita e a área do triângulo ABC, ou seja, $S_3 = \frac{1}{3}\left(\pi R^2 - S_{ABC}\right) = \frac{\pi \cdot 2^2}{3} - \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{4\pi}{3} - \frac{S_{ABC}}{3}$.

A área sombreada $S = S_1 + S_2 + S_3$ é dada por:

$$S = \left(\frac{S_{ABC}}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \pi + \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{S_{ABC}}{3}\right) = 2\pi.$$

Portanto, a área sombreada $S = 2\pi \text{ cm}^2$ é numericamente igual ao comprimento da circunferência inscrita (menor) que possui raio $r = 1$, que é $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ cm.

9) Considere os números p, q e r abaixo:

$$p = \frac{\sqrt{180} + 2\sqrt{20} - 2\sqrt{605}}{4\sqrt{80} - \sqrt{500}}$$

$$q = \left[\left(9^{0,\bar{6}}\right)^{0,5}\right]^{-3}$$

$$r = 0,\overline{18} \cdot \left(\frac{\sqrt{0,25} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 225^{0,5}} \right)$$

Se x é o número obtido pelo produto entre p, q e r, então x é um número

a) irracional positivo.
b) irracional negativo.
c) racional negativo.
d) racional positivo.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$p=\frac{\sqrt{180}+2\sqrt{20}-2\sqrt{605}}{4\sqrt{80}-\sqrt{500}}=\frac{\sqrt{6^2\cdot 5}+2\sqrt{2^2\cdot 5}-2\cdot\sqrt{11^2\cdot 5}}{4\sqrt{4^2\cdot 5}-\sqrt{10^2\cdot 5}}=$$

$$=\frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}-22\sqrt{5}}{16\sqrt{5}-10\sqrt{5}}=\frac{-12}{6}=-2$$

$$q=\left[\left(9^{0,\bar{6}}\right)^{0,5}\right]^{-3}=\left[\left(9^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-3}=9^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-3)}=9^{-1}=\frac{1}{9}$$

$$r=0,\overline{18}\cdot\left(\frac{\sqrt{0,25}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-225^{0,5}}\right)=\frac{18}{99}\cdot\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{4}}+2^4}{3^2-\sqrt{15^2}}\right)=\frac{2}{11}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}+16}{9-15}\right)=\frac{2}{11}\cdot\left(-\frac{33}{2\cdot 6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x=p\cdot q\cdot r=(-2)\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}$ que é um número racional positivo.

10) Um ônibus percorre, na estrada, 9 km com 1 litro de combustível.
O motorista desse ônibus realizou uma viagem de 551 km.

Ao sair do local de origem da viagem, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicava $\frac{6}{8}$ do tanque.

Após o motorista percorrer 225 km, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicou $\frac{1}{2}$ tanque.

Com base nessa situação, é correto afirmar que, ao chegar ao destino proposto, a quantidade de combustível restante no tanque do ônibus estava entre

a) 11 e 12 litros.
b) 12 e 13 litros.
c) 13 e 14 litros.
d) 14 e 15 litros.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Para percorrer 225 km, o ônibus gasta $\frac{225}{9}=25\,\ell$ de combustível e o ponteiro do marcador de combustível vai de $\frac{6}{8}$ a $\frac{1}{2}$. Portanto, 25 ℓ de combustível correspondem a $\frac{6}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ do tanque. Logo, o tanque possui capacidade $4\cdot 25=100\,\ell$.

No início do percurso havia no tanque $\frac{6}{8}\cdot 100=75\,\ell$. Para percorrer 551 km, são gastos $\frac{551}{9}\approx 61,2\,\ell$ de combustível. Logo, ao chegar ao destino, restam no tanque $75-61,2=13,8\,\ell$ de combustível.

11) Uma escola tem 10 salas de aula. Em todas elas cada uma das quatro paredes mede 500 cm de comprimento e 0,3 dam de altura.
Deseja-se pintar as paredes dessas salas com tinta branca e para isso foram comprados galões de 36 $d\ell$ por R$ 54,00 cada um.
O pintor calculou que, para pintar cada 12 m^2 de parede, gastará 3 ℓ dessa tinta e um tempo de 24 minutos.
Sabe-se que ele cobra R$ 20,00 por hora trabalhada.
Com base nessas informações, é correto afirmar que
a) serão necessários mais de 41 galões de 3,6 ℓ para essa pintura.
b) para pintar todas as paredes serão gastos menos de R$ 2.000,00 com tinta.
c) serão necessárias apenas 18 horas de trabalho para pintar as 10 salas de aula.
d) o pintor receberá, em reais, ao final da pintura, o valor equivalente ao de 8 galões de tinta.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
A área de cada parede é $500\,\text{cm}\cdot 0,3\,\text{dam} = 5\,\text{m}\cdot 3\,\text{m} = 15\,\text{m}^2$. A área total das paredes é $10\cdot 4\cdot 15 = 600\ \text{m}^2$.
Dessa forma, para pintar $600\,\text{m}^2$ de parede são gastos $\frac{600}{12}\cdot 3 = 150\,\ell$ de tinta e um tempo de $\frac{600}{12}\cdot 24 = 1200\ \text{min} = 20\ \text{h}$.
A quantidade de galões de tinta necessária é $\frac{150\,\ell}{36\,\text{d}\ell} = \frac{150\,\ell}{3,6\,\ell} \approx 41,7$, ou seja, devem ser adquiridos 42 galões.
O valor gasto com a tinta é $42\cdot 54 = 2268$ reais.
O pintor receberá $20\cdot 20 = 400$ reais que é diferente do preço de 8 galões de tinta, que custam $8\cdot 54 = 432$ reais.

12) Fernando, um aluno aplicado em Matemática, propôs a seus colegas o desafio de descobrirem os coeficienttes e as raízes de três equações do 2º grau, todas da forma $ax^2 + bx + c = 0$.
Ele afirmou que:
- Os coeficientes dos termos de maiores graus da 2ª e da 3ª equações são iguais ao menor número inteiro positivo.
- O conjunto solução da 1ª equação é $\{-1, -2\}$ e a 2ª equação possui duas raízes reais e iguais a 3.
- O coeficiente do termo de maior grau da 1ª equação é igual ao oposto do coeficiente de maior grau da 3ª equação.
- O coeficiente de x da 3ª equação é a metade do coeficiente de x da 2ª equação.
- O produto das raízes da 3ª equação é igual à unidade.

Com base nesses dados, marque a alternativa **FALSA**.
a) A soma dos coeficientes da 1ª equação é um número que pode ser escrito como 2k, tal que $k \in \mathbb{Z}$.
b) A soma das raízes das três equações é igual ao oposto do coeficiente de x da 2ª equação.
c) A razão entre o termo independente de x da 3ª equação e o termo independente de x da 1ª equação é um número do conjunto $\mathbb{Q}_-$.

d) A diferença entre as raízes da 3ª equação é um número racional.

b) A soma das raízes das três equações é igual ao oposto do coeficiente de x da 2^a equação.

c) A razão entre o termo independente de x da 3^a equação e o termo independente de x da 1^a equação é um número do conjunto $\mathbb{Q}_-$.

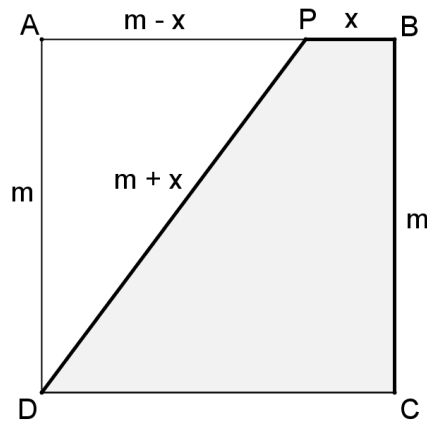
d) A diferença entre as raízes da 3^a equação é um número racional.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A 1ª equação tem coeficiente de x^2 igual a -1 e raízes -1 e -2. Logo, pode ser escrita como: $-(x-(-1))(x-(-2)) = -(x+1)(x+2) = -x^2 - 3x - 2 = 0$.
A 2ª equação tem coeficiente de x^2 igual a 1 e raiz 3 (dupla). Logo, pode ser escrita como: $1 \cdot (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 = 0$.
A 3ª equação tem coeficiente de x^2 igual a 1, coeficiente de x igual a $\frac{-6}{2} = -3$ e produto das raízes igual a 1. Logo, pode ser escrita como: $x^2 - 3x + 1 = 0$.
a) VERDADEIRA, pois a soma dos coeficientes da 1ª equação é $-6 = 2 \cdot (-3)$.
b) VERDADEIRA, pois as raízes da 3ª equação têm soma 3 e a soma das raízes das três equações é $(-3) + 6 + 3 = 6$.
c) VERDADEIRA, pois essa razão é $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}_-$.
d) FALSA, pois a diferença entre as raízes da 3ª equação é dada por $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{|1|} = \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

13) Considere um quadrado ABCD de lado m. Seja P o ponto do lado AB tal que $\overline{DP} = \overline{CB} + \overline{BP}$.
A área do trapézio DCBP é x% da área do quadrado ABCD.
O número x está compreendido entre
a) 60 e 62
b) 62 e 64
c) 64 e 66
d) 66 e 68

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Seja $\overline{BP} = x$, então $\overline{DP} = \overline{CB} + \overline{BP} = m + x$ e $\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP} = m - x$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADP, temos:

$$(m+x)^2 = m^2 + (m-x)^2 \Leftrightarrow m^2 + 2mx + x^2 = m^2 + m^2 - 2mx + x^2 \Leftrightarrow 4mx = m^2 \Leftrightarrow x = \frac{m}{4}$$

A área do trapézio BCDP é $S_{BCDP} = \frac{\left(m + \frac{m}{4}\right)}{2} \cdot m = \frac{5}{8} m^2 = \frac{5}{8} \cdot S_{ABCD} = 62,5\% \cdot S_{ABCD}$.
Portanto, $x = 62,5$ que está compreendido entre 62 e 64.

14) Um parque está sendo construído na cidade de Barbacena. Através das alamedas 1 e 2 do parque, que são paralelas, serão construídos dois muros retilíneos, a partir dos pontos E e R, passando pelos pontos P e A, e esses muros se encontrarão no ponto C, conforme figura.

Sabe-se que
- $\overline{EP} = 1 \text{ km}$
- $\overline{RA} = 1,5 \text{ km}$
- São construídos 12 m de cada muro, por dia.
- O muro 1 será totalmente construído em 250 dias.
- As obras das construções dos muros 1 e 2 terminarão no mesmo dia.

Se a obra do muro 1 se iniciou dia 1º de agosto de 2013, e sabendo ainda que as obras dos dois muros foram realizadas em dias consecutivos (ou seja, não houve dia de folga em nenhuma das obras), então a obra do muro 2 teve início dia
a) 31 de março de 2013.
b) 30 de março de 2013.

c) 29 de março de 2013.
d) 28 de março de 2013.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
O muro 1 será totalmente construído em 250 dias, então ele mede $12 \cdot 250 = 3000 \text{ m} = 3 \text{ km}$, o que implica que $\overline{EC} = 3 \text{ km}$.
Aplicando o teorema de Thales nesse feixe de paralelas, temos:
$\frac{\overline{EC}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} \Leftrightarrow \frac{3}{1} = \frac{\overline{RC}}{1,5} \Leftrightarrow \overline{RC} = 4,5 \text{ km} = 4500 \text{ m}$.
Sendo assim, o muro 2 demora $\frac{4500}{12} = 375$ dias para ser construído e, como as duas obras terminam no mesmo dia, a construção do muro 2 deve começar $375 - 250 = 125$ dias antes da do muro 1.
Como os meses de julho, junho, maio e abril têm 31, 30, 31 e 30 dias, respectivamente, totalizando 122 dias, então a obra do muro 2 deve tomar ainda 3 dias do mês de março, devendo começar no dia 29 de março de 2013.

15) A tabela e os gráficos abaixo são referentes aos candidatos do Concurso CPCAR 2012.

Distribuição por região do Brasil

	Realizaram concurso		Aprovados no concurso	
	Nº de candidatos	%	Nº de candidatos	%
Norte	477	5,4	33	4,2
Nordeste	710	8,0	59	7,2
Centro-oeste	554	6,3	39	4,8
Sudeste	6605	74,8	659	80
Sul	482	5,5	31	3,8
Total	8828	100	821	100

Procedência escolar dos aprovados

Motivação dos aprovados pela carreira

Analisando as informações acima, afirma-se sobre o Concurso CPCAR 2012:
I. Os candidatos da região Sudeste, além do maior número na realização do concurso, também tiveram maior percentual entre os aprovados.
II. Dentre os aprovados que vieram de Escola Pública Estadual, é possível não haver nenhum da Região Sudeste.
III. Dentre os aprovados que não foram motivados pelo ensino oferecido, é possível que só haja candidatos vindos da Região Sudeste.
Julgue cada afirmativa em (V) verdadeira ou (F) falsa e marque a alternativa que contém a sequência correta.
a) V – V – V
b) V – F – F
c) F – F – V
d) V – F – V

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
I - VERDADEIRA
Na primeira tabela, observa-se que os candidatos da região Sudeste foram a maioria dos candidatos do concurso (74,8%) e também os que tiveram o maior percentual entre os aprovados (80%).
II – FALSA
No gráfico de pizza, observa-se que 21% dos aprovados vieram de Escolas Públicas Estaduais e somente $100\% - 80\% = 20\%$ dos aprovados não são da região Sudeste, então, necessariamente, há aprovados de Escolas Públicas Estaduais, oriundos da região Sudeste.
III – FALSA
No gráfico em barras, observa-se que $100\% - 12\% = 88\%$ dos aprovados não foram motivados pelo ensino oferecido. Como apenas 80% dos aprovados são da região Sudeste, então necessariamente há aprovados que não foram motivados pelo ensino oferecido e que não são oriundos da região Sudeste.

16) Gustavo está brincando com seu skate de dedo numa pista que foi projetada segundo uma modelagem matemática descrita a seguir.

- A pista está sobre o tampo de uma mesa apoiada no solo.
- O tampo da mesa e o eixo de simetria da curva, indicados no desenho, coincidem com os eixos $\overleftrightarrow{Ox}$ e $\overleftrightarrow{Oy}$, respectivamente, do sistema cartesiano ortogonal.
- O ponto O é a origem do sistema cartesiano ortogonal.
- A e B são pontos que pertencem a uma reta paralela ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$.
- C e D são pontos que pertencem a uma reta paralela à reta AB e distante desta 288 mm.
- A curva da pista de B até C coincide com um arco de parábola.
- A distância de C ao eixo de simetria da parábola é 40 mm.
- O ponto R, que é o mais baixo do arco de parábola, está a 150 mm do ponto O.
- $\overline{AB} = 400$ mm

Durante a execução de uma manobra, o skate passa por um ponto P, da parábola, que possui ordenada a 450 mm do ponto R e que está a 30 mm do eixo de simetria.
Assim, pode-se afirmar que a distância do ponto A ao eixo de simetria é, em milímetros, um número compreendido entre
a) 400 e 430
b) 430 e 460
c) 460 e 490
d) 490 e 520

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

As coordenadas do vértice de um trinômio do 2º grau da forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ são $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = f(x_V) = -\frac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

O ponto R, que é o mais baixo do arco de parábola, está a 150 mm do ponto O, então o ponto R é o vértice da parábola e suas coordenadas são $R(0,150)$. Assim, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$y_V = f(x_V) = f(0) = c = 150$$

Logo, o trinômio do 2º grau pode ser escrito na forma $y = f(x) = ax^2 + 150$.

As coordenadas do ponto P da parábola são $P(30,600)$, então $f(30) = a \cdot 30^2 + 150 = 600 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Portanto, a equação que representa a curva é $f(x) = \frac{x^2}{2} + 150$.

A distância de C ao eixo de simetria da parábola é 40 mm, então a abscissa do ponto C é $x_C = 40$ e sua ordenada é $y_C = f(40) = \frac{40^2}{2} + 150 = 950$.

A ordenada do ponto B é 288 unidades menor que a ordenada do ponto C, então $y_B = y_C - 288 = 950 - 288 = 662$.

A abscissa do ponto B é dada por:

$$y_B = f(x_B) = \frac{x_B^2}{2} + 150 = 662 \Leftrightarrow x_B^2 = 1024 \Rightarrow x_B = -32$$

Portanto, a distância do ponto A ao eixo de simetria é $400 + 32 = 432 \in \left]430, 460\right[$.

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2012/2013

1) O oposto do número real $x = \frac{526}{495} + \left[\frac{\left((-2)^{(2\sqrt{2}-1)}\right)^{(2\sqrt{2}+1)}}{128} \right]^{-1}$ está compreendido entre

a) $-0,061$ e $-0,06$
b) $-0,062$ e $-0,061$
c) $-0,063$ e $-0,062$
d) $-0,064$ e $-0,063$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$x = \frac{526}{495} + \left[\frac{\left((-2)^{(2\sqrt{2}-1)}\right)^{(2\sqrt{2}+1)}}{128} \right]^{-1} = \frac{526}{495} + \left[\frac{(-2)^{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)}}{128} \right]^{-1} = \frac{526}{495} + \left[\frac{(-2)^{(8-1)}}{128} \right]^{-1} =$$

$$= \frac{526}{495} + \left[\frac{-128}{128} \right]^{-1} = \frac{526}{495} + (-1) = \frac{31}{495} = \frac{62}{990} = 0,0626262\ldots = 0,0\overline{62}$$

O oposto de x é $-x = -0,0\overline{62}$ que está entre $-0,063$ e $-0,062$.

2) A equação $x = \sqrt{3x + a^2 + 3a}$, em que x é a incógnita e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < -3$, possui conjunto solução S, $S \subset \mathbb{R}$. Sobre S tem-se as seguintes proposições:
I) Possui exatamente dois elementos.
II) Não possui elemento menor que 2.
III) Possui elemento maior que 3.
Sobre as proposições acima, são verdadeiras
a) apenas I e II.
b) apenas I e III.
c) apenas II e III.
d) I, II e III.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Condições de existência iniciais: $x \geq 0$ e $3x + a^2 + 3a \geq 0$

$$x = \sqrt{3x + a^2 + 3a} \Leftrightarrow x^2 = 3x + a^2 + 3a \Leftrightarrow x^2 - 3x - a(a+3) = 0 \Leftrightarrow x = a + 3 \vee x = -a$$

Como $a < -3 \Leftrightarrow a + 3 < 0$, portanto $x = a + 3 < 0$ não satisfaz às condições de existência.
Analisando a solução $x = -a$, observamos que $x = -a > 0$ e $3x + a^2 + 3a = 3 \cdot (-a) + a^2 + 3a = a^2 \geq 0$.
Portanto, a solução $x = -a$ é uma solução válida e $S = \{-a\}$, que possui um único elemento $-a > 3$.

Logo, as proposições verdadeiras são apenas (II) e (III).

3) “NASCIDOS PARA VOAR: 60 ANOS DE FUMAÇA JÁ”

Fonte: Jornal EPCARIANO – Ano 1, n° 1 – p. 4

Em maio de 2012, o esquadrão EDA (Esquadrilha da Fumaça) comemorou 60 anos de apresentações. Para homenagear esse esquadrão foi realizado na EPCAR um concurso em que os alunos teriam que criar um desenho.
Um das regras desse concurso foi: elaborar um desenho usando conhecimentos de matemática.
O aluno vencedor apresentou o desenho em circunferências conforme esquema abaixo.

Com base nas informações do desenho, julgue verdadeira ou falsa cada afirmativa.

(02) A menor soma das medidas dos comprimentos dos arcos PS, GH, FK, e LM é igual a 6π.

(04) A razão entre $\overline{PS}$ e $\overline{ST}$, nessa ordem, é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(08) $\overline{PS}$ e $\overline{GH}$ são congruentes.

(16) $\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{EJ}$

(32) $\overline{ST} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

A soma das alternativas verdadeiras é igual a

a) 20
b) 22
c) 36
d) 44

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

(02) FALSA

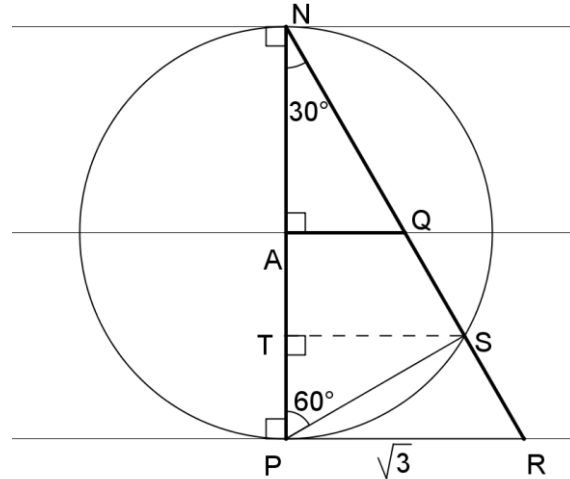
No triângulo NPR, temos: $\text{tg}\, R\hat{N}P = \frac{PR}{NP} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R\hat{N}P = \frac{\pi}{6} \Rightarrow PS = 2 \cdot R\hat{N}P = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Na primeira circunferência, como os ângulos centrais $F\hat{E}K = G\hat{E}H = 60^\circ \Rightarrow GH = FK = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

Na segunda circunferência, $\overline{LM}$ é um diâmetro, portanto $LM = \pi$.

$\Rightarrow PS + GH + FK + LM = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi = 2\pi$ rad

Como as três circunferências possuem o mesmo raio 1,5, então a soma dos comprimentos dos arcos é $2\pi \cdot 1,5 = 3\pi$ unidades de comprimento.

(04) VERDADEIRA

Como $R\hat{N}P = 30^\circ$ e $\overline{PN}$ é um diâmetro da circunferência, então $N\hat{S}P = 90^\circ$ e $N\hat{P}S = 60^\circ$.

No triângulo PTS, temos: $\text{sen}\, 60^\circ = \frac{\overline{ST}}{\overline{PS}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\overline{PS}}{\overline{ST}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(08) VERDADEIRA

Como $PS = GH = 60^\circ$ e as circunferências possuem o mesmo raio, então $\overline{PS} \equiv \overline{GH}$.

(16) FALSA

Na terceira circunferência, observamos que $\Delta NAQ \sim \Delta NPR$.

Portanto, $\frac{\overline{AQ}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AQ}}{\sqrt{3}} = \frac{1,5}{3} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

O segmento $\overline{EJ}$ é um raio da primeira circunferência e, portanto, $\overline{EJ} = 1,5$.

(32) VERDADEIRA

Na terceira circunferência, notemos que o triângulo NTS é metade do triângulo equilátero inscrito na circunferência. Assim, o ponto A é o baricentro desse triângulo equilátero e $\frac{\overline{NA}}{\overline{AT}} = \frac{2}{1}$.

Como $\Delta NAQ \sim \Delta NTS$, temos $\frac{\overline{ST}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{NT}}{\overline{NA}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \overline{ST} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Portanto, a soma das alternativas verdadeiras é $4 + 8 + 32 = 44$.

4) Uma professora de Matemática do 5° ano do Ensino Fundamental, para dar início a um conteúdo novo, levou para a sala de aula p bolinhas em uma única caixa.

Ela chamou os alunos α, β, γ à frente da turma e pediu a cada aluno que, um de cada vez, fizesse retiradas sucessivas de um mesmo número de bolinhas, conforme descrito no quadro abaixo:

ALUNO	QUANTIDADE DE RETIRADAS	QUANTIDADE DE BOLINHAS RETIRADAS POR VEZ	SOBRA DE BOLINHA NA CAIXA
α	x	2	0
β	y	3	1
γ	z	5	2

Sabe-se que:
I − $40 < p < 80$
II – Cada aluno, logo após a contagem das bolinhas por ele retiradas, devolveu todas as bolinhas retiradas.
III – Não houve erro na contagem por parte dos alunos.
Com base nessas informações, é FALSO que
a) $x+y+z>p$
b) x e y são primos entre si.
c) $y<\frac{1}{3}p$
d) $x-z$ é um número ímpar.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Analisando a retirada de α, temos $p=2x$.
Analisando a retirada de β, temos: $p=3y+1$.
Analisando a retirada de γ, temos: $p=5z+2$.
Note que $p+2=2(x+1)=3(y+1)\Rightarrow 2|(p+2)\ \wedge\ 3|(p+2)\Rightarrow 6|(p+2)$.
Podemos, então, escrever $p+2=6k$, $k\in\mathbb{Z}$. Substituindo essa equação em $p=5z+2$, temos:
$(6k-2)=5z+2\Leftrightarrow 6k-5z=4\Leftrightarrow k=4+5t\ \wedge\ z=4+6t,\ t\in\mathbb{Z}$
$\Rightarrow p=5\cdot(4+6t)+2=22+30t$, $t\in\mathbb{Z}$

A condição (I) estabelece que $40<p<80\Rightarrow 40<22+30t<80\Leftrightarrow 18<30t<58\overset{t\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} t=1$.

$$t=1\Rightarrow\begin{cases}p=22+30t=22+30\cdot 1=52\\ x=\frac{p}{2}=26\\ y=\frac{p-1}{3}=17\\ z=\frac{p-2}{5}=10\end{cases}$$

a) VERDADEIRA: $x+y+z=53>52=p$
b) VERDADEIRA: $\text{mdc}(x,y)=\text{mdc}(26,17)=1$
c) VERDADEIRA: $y=\frac{p-1}{3}<\frac{p}{3}$
d) FALSA: $x-z=26-10=16$ que é par.

5) Hoje, dia 29 de julho de 2012, José tem o dobro da idade que Luiz tinha quando José tinha a idade que Luiz tem. Quando Luiz tiver a idade que José tem, a soma das idades deles será 90 anos.
Em 29 de julho de 2017, a razão entre as idades de José e Luiz, nessa ordem, será

a) $\frac{6}{5}$

b) $\frac{9}{7}$

c) $\frac{5}{4}$

d) $\frac{27}{20}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Sejam J e L as idades de José e Luiz, respectivamente, em 29 de julho de 2012, com $J > L$.
José tinha L anos há $(J - L)$ anos atrás, quando Luiz tinha $L - (J - L) = 2L - J$ anos. Assim, podemos escrever: $J = 2 \cdot (2L - J) \Leftrightarrow 3J = 4L$.
Luiz terá J anos daqui a $(J - L)$ anos, quando José terá $J + (J - L) = 2J - L$ anos. Assim, podemos escrever: $J + (2J - L) = 90 \Leftrightarrow 3J - L = 90$.
Substituindo a primeira equação na segunda, temos: $4L - L = 90 \Leftrightarrow 3L = 90 \Leftrightarrow L = 30$ anos.
Substituindo esse valor na primeira equação, temos: $3J = 4 \cdot 30 \Leftrightarrow J = 40$ anos.
Em 29 de julho de 2017, terão se passado 5 anos, portanto José terá 45 anos e Luiz terá 35 anos. Logo, a razão entre as idades de José e Luiz, dessa data, será $\frac{45}{35} = \frac{9}{7}$.

6) Considere as expressões abaixo e simplifique-as.

$$A = \frac{(x^{2n+1} + x)(x^{2n+1} - x) - (x^4)^{n+\frac{1}{2}}}{(x^n + x)^2 - x^{2n} - 2x^{n+1}},\ x \neq 0$$

$C = 4z^2 - 3y^2$ dado que $z = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{\sqrt{3}}$, $a = (2+\sqrt{3})^{2012}$ e $b = (2-\sqrt{3})^{2012}$.

Marque a alternativa verdadeira.

a) É possível determinar o valor de $\frac{C}{4A+C}$.

b) $\sqrt{C}$ é um número irracional.

c) $[-(A-C)]^{-0,5} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $(A+C)^{-0,\bar{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$A=\frac{\left(x^{2n+1}+x\right)\left(x^{2n+1}-x\right)-\left(x^4\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\left(x^n+x\right)^2-x^{2n}-2x^{n+1}}=\frac{\left(x^{4n+2}-x^2\right)-x^{4n+2}}{x^{2n}+2x^{n+1}+x^2-x^{2n}-2x^{n+1}}=\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

$$C=4z^2-3y^2=4\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{a-b}{\sqrt{3}}\right)^2=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab=$$

$$=4\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{2012}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^{2012}=4\cdot\left[\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^{2012}=4\cdot(4-3)^{2012}=4$$

a) FALSA, pois $4A+C=4\cdot(-1)+4=0$.

b) FALSA, pois $\sqrt{4}=2\in\mathbb{Q}$.

c) FALSA, pois $\left[-(A-C)\right]^{-0,5}=\frac{1}{\sqrt{C-A}}=\frac{1}{\sqrt{4-(-1)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) VERDADEIRA, pois $(A+C)^{-0,\overline{3}}=(A+C)^{-\frac{3}{9}}=(-1+4)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$.

7) Maria Fernanda utiliza um balde com capacidade igual a 0,028 $h\ell$ para aguar as 16 roseiras de seu jardim. Ela enche o balde, inicialmente vazio, e vai, de roseira em roseira, sem desperdício de água, jogando exatamente 800 cm^3 em cada uma.

Toda vez que o líquido não é suficiente para continuar, Maria Fernanda retorna e completa a capacidade do balde. Ela faz isso até que tenha aguado todas as roseiras.

É correto afirmar que, para Maria Fernanda aguar todas as roseiras,

a) o volume de água que sobra no balde é maior que $\frac{5}{7}$ do total de sua capacidade.

b) o total de água não gasto não chega a 15 ℓ.

c) é necessário encher o balde somente 5 vezes.

d) o volume de água que sobra no balde é menor que 10% do total gasto.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$0,028\,h\ell=0,028\cdot100\,\ell=2,8\,\ell=2,8\,dm^3=2,8\cdot1000\,cm^3=2800\,cm^3$$

Cada balde cheio permite que Maria Fernanda águe 3 roseiras e restam $400\,cm^3$ no balde.

Para que sejam aguadas 16 roseiras será necessário encher o balde 6 vezes, sendo que na sexta vez apenas uma roseira precisará ser aguada e, portanto, restarão $2000\,cm^3=2\,dm^3=2\,\ell$ no balde.

a) FALSO: $\frac{5}{7}\cdot2800=2000\,cm^3$

b) VERDADEIRO: o total de água não gasto é $2\,\ell<15\,\ell$.

c) FALSO: o balde deve ser enchido 6 vezes.

d) FALSO: o total gasto foi $16\cdot800=12800\,cm^3=12,8\,\ell$ e $2\,\ell>10\%\cdot12,8\,\ell=1,28\,\ell$.

8) Para encher um reservatório com água, pode-se usar duas torneiras. A primeira torneira enche esse reservatório em 36 minutos. A segunda enche o mesmo reservatório em 24 minutos.
Certo dia, em que esse reservatório estava vazio, a primeira torneira é aberta durante um período de k minutos. Ao fim de k minutos, a primeira torneira é fechada e abre-se, imediatamente, a segunda, que fica aberta por um período de $(k+3)$ minutos.
Se o volume de água atingido corresponde a $\frac{2}{3}$ da capacidade do reservatório, então o tempo total gasto foi
a) 31% de hora.
b) 30% de hora.
c) 28% de hora.
d) 27% de hora.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Sejam v_1 e v_2 as vazões em ℓ/min da primeira e da segunda torneiras, respectivamente, e V litros o volume do reservatório.
Como a primeira torneira enche o reservatório em 36 minutos, temos: $v_1 = \frac{V}{36}\ \ell/\text{min}$.
Como a segunda torneira enche o reservatório em 24 minutos, temos: $v_2 = \frac{V}{24}\ \ell/\text{min}$.
A primeira torneira, aberta durante um período de k minutos, despeja um volume $k \cdot v_1 = k \cdot \frac{V}{36}\ \ell$.
A segunda torneira, aberta durante um período de $(k+3)$ minutos, despeja um volume $(k+3) \cdot v_2 = (k+3) \cdot \frac{V}{24}\ \ell$.
O volume de água atingido será dado por
$$k \cdot \frac{V}{36} + (k+3) \cdot \frac{V}{24} = \frac{2}{3}V \Leftrightarrow 2k + 3(k+3) = 48 \Leftrightarrow k = \frac{39}{5} \text{ min}.$$
Assim, o tempo total gasto foi $2k + 3 = 2 \cdot \frac{39}{5} + 3 = \frac{93}{5} \text{ min} = \frac{93}{5 \cdot 60} \text{ h} = \frac{31}{100} \text{ h} = 31\% \text{ h}$.

9) Analise as proposições abaixo.
I) Uma jarra cheia de leite pesa 235 dag; com $\frac{3}{4}$ de leite a jarra pesa 19,5 hg. O peso da jarra com $\frac{5}{8}$ de leite é y gramas. A soma dos algarismos de y é igual a 13.
II) Com $\frac{3}{5}$ de $0,\overline{6}$ da metade de uma lata que comporta 20 ℓ de tinta, um pintor consegue pintar uma área de 16 m^2. Para pintar uma área 25% menor, são necessários, 0,003 m^3 de tinta.
III) Um pedreiro prepara uma mistura com 1 kg de cimento e 600 $m\ell$ de água. Em seguida, ele aumenta em 50% a quantidade de cimento e mexe até ficar homogênea a mistura, obtendo 1800 $m\ell$ dessa mistura.

Se a densidade da água é 1 $\text{g/m}\ell$, então a densidade do cimento é igual a 1,25 kg/ℓ.
Tem-se que
a) apenas I é verdadeira.
b) apenas II é falsa.
c) apenas I e II são falsas.
d) I, II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
I) VERDADEIRA
Seja a g o peso da jarra vazia e b g o peso do leite quando a jarra está cheia. Assim, temos:
$a + b = 235 \text{ dag} = 2350 \text{ g}$

$a + \frac{3}{4}b = 19,5 \text{ hg} = 1950 \text{ g}$

Subtraindo a segunda equação da primeira: $\frac{1}{4}b = 400 \Leftrightarrow b = 1600 \text{ g}$.
Substituindo o valor de b na primeira equação, temos: $a + 1600 = 2350 \Leftrightarrow a = 750 \text{ g}$.
O peso da jarra com $\frac{5}{8}$ de leite é $a + \frac{5}{8}b = 750 + \frac{5}{8} \cdot 1600 = 1750 \text{ g}$.
Portanto, $y = 1750$ cuja soma dos algarismos é $1+7+5+0=13$.
II) VERDADEIRA
$\frac{3}{5} \cdot 0,\overline{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 = 4\ \ell$
Para pintar uma área 25% menor, será necessário $75\% \cdot 4\ \ell = 3\ \ell = 3\text{ dm}^3 = 3 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3 = 0,003\text{ m}^3$ de tinta.
III) VERDADEIRA
A mistura de 1,5 kg de cimento e $600\text{ m}\ell$ de água tem volume total $1800\text{ m}\ell$. Portanto, 1,5 kg de cimento tem volume $1200\text{ m}\ell = 1,2\ \ell$ e a sua densidade é $\frac{1,5\text{ kg}}{1,2\ \ell} = 1,25\text{ kg}/\ell$.

10) “Ensino privatizado
− 78% dos alunos brasileiros estão matriculados em instituições de ensino superior privadas.
− Nos Estados Unidos, o percentual é de 22%.”
FONTE: ISTO É – 4/abril/12 – Ano 36, n° 2212 – p.55

Sabendo-se que os gráficos acima se referem ao Brasil, analise as afirmativas abaixo e marque V (verdadeiro) ou F (falso).

( ) O aumento do número de instituições de ensino superior privadas entre os anos 2000 e 2010 foi x%. O número x está compreendido entre 106 e 110.

( ) No período de 2000 a 2010 o crescimento no número de instituições de ensino superior públicas representa mais que a décima parte do crescimento no número de instituições de ensino superior privadas.

( ) No ano de 2010, o número de alunos ingressantes no ensino superior privado representa mais de 360% do número de alunos ingressantes no superior público.

( ) $A-B$ representa mais de 65% de A.

A sequência correta é

a) V – V – F – F
b) V – F – V – F
c) F – V – V – V
d) F – F – F – V

RESPOSTA: b

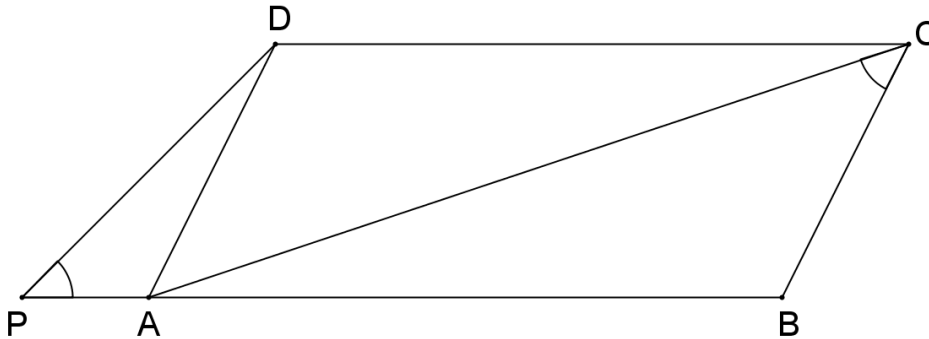
RESOLUÇÃO:

(V) O aumento do número de instituições de ensino superior privadas entre os anos 2000 e 2010 foi $\frac{2099-1004}{1004}=\frac{1095}{1004}\approx 109\%$. Portanto, $106 < x < 109$.

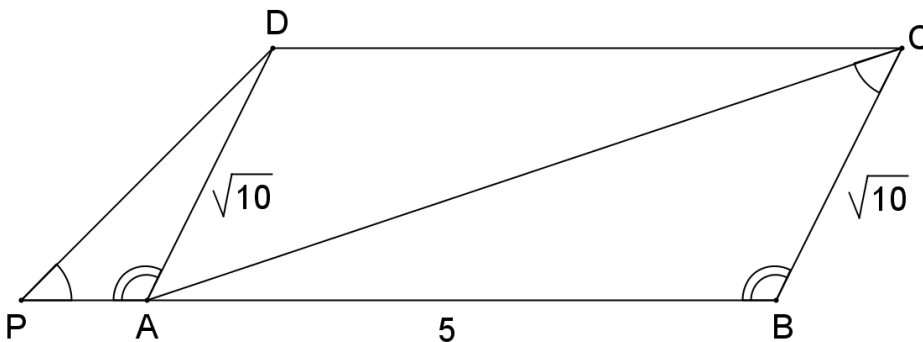
(F) O crescimento do número de instituições de ensino superior públicas foi $278-176=102$, o crescimento do número de instituições privadas foi $2099-1004=1095$ e $102<\frac{1}{10}\cdot 1095=109,5$.

(V) A razão entre o número de alunos ingressantes no ensino superior privado e no ensino superior público é $\frac{1709}{457}\approx 3,74=374\%>360\%$.

(F) $\frac{A-B}{A}=\frac{602-227}{602}\approx 0,623=62,3\%<65\%$

11) Seja ABCD um paralelogramo cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 5 e $\sqrt{10}$. Prolongando o lado $\overline{AB}$ até o ponto P, obtém-se o triângulo APD, cujo ângulo $A\hat{P}D$ é congruente ao ângulo $A\hat{C}B$, conforme a figura.

Então, a medida $\overline{AP}$ é
a) 0,2
b) 2
c) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$
d) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$\#ABCD$ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC} \wedge \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{10}$.

$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow P\hat{A}D = A\hat{B}C$

$$A\hat{P}D = A\hat{C}B \wedge P\hat{A}D = A\hat{B}C \Rightarrow \Delta APD \sim \Delta BCA \text{ (A.A.)} \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AP}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow \overline{AP} = 2 \text{ u.c.}$$

12) Analise as afirmativas seguintes e classifique-as em V (verdadeiro) ou F (falsa).

( ) Se p é um número inteiro, ímpar e $p > 2$, então o maior valor de x que satisfaz a inequação $-p(x-p) \geq 2(2-x)$ é sempre um número ímpar.
( ) Para todo $m \in \mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $2mx - m(x+1) = 0$ é $S = \{1\}$.
( ) Se a menor raiz da equação (I) $x^2 + (m-1)x - 3m = 0$ e a menor raiz da equação (II) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ são iguais, então m é a outra raiz de (I).
Tem-se a sequência correta em
a) F – F – V
b) V – V – F
c) V – F – V
d) F – V – F

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
(V)
$p > 2 \Leftrightarrow 2 - p < 0$
$-p(x-p) \geq 2(2-x) \Leftrightarrow -px + p^2 \geq 4 - 2x \Leftrightarrow 2x - px \geq 4 - p^2 \Leftrightarrow (2-p)x \geq (2+p)(2-p) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \leq 2 + p$
Portanto, o maior valor de x é $2 + p$ que é um número ímpar.
(F)
$2mx - m(x+1) = 0 \Leftrightarrow 2mx - mx - m = 0 \Leftrightarrow mx = m$
Se $m \neq 0$, então $x = 1$ e $S = \{1\}$ e, se $m = 0$, $S = \mathbb{R}$.
(V)
$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{1}{2}$
Portanto, $x = -3$ é a menor raiz de $x^2 + (m-1)x - 3m = 0$. Portanto,
$(-3)^2 + (m-1)\cdot(-3) - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.
Se $m = 2$, a equação resultante é $x^2 + x - 6 = 0$, cujas raízes são $x = -3$ e $x = 2$, confirmando que $x = -3$ é a menor raiz e que a outra raiz $x = 2$ é igual a m.

13) Uma empresa foi contratada para executar serviço de pintura no alojamento dos alunos do 1° ano CPCAR. O prazo estabelecido no contrato para a conclusão do serviço foi de 10 dias.
O serviço começou a ser executado por uma equipe de 6 funcionários da empresa, cada um trabalhando 6 horas por dia.
Ao final do 8° dia de serviço somente $\frac{3}{5}$ do serviço de pintura havia sido executado.
Para terminar o serviço dentro do prazo, a equipe de serviço recebeu mais 2 funcionários e todos passaram a trabalhar 9 horas por dia. Com isso a produtividade da equipe duplicou. A nova equipe, para concluir o trabalho, gastou mais de 1 dia, porém menos de 2 dias.
Se h representa o número de horas que cada funcionário da nova equipe trabalhou no 10º dia de trabalho, então h é um número compreendido entre
a) 0 e 2
b) 2 e 4

c) 4 e 6
d) 6 e 8

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Vamos dispor as informações do enunciado na tabela a seguir, indicando para cada grandeza se ela é diretamente ou inversamente proporcional ao número de dias trabalhados:

N° de funcionários (INV.)	Horas por dia (INV.)	N° de dias	Trabalho executado (DIR.)	Produtividade (INV.)
6	6	8	$\frac{3}{5}$	1
$6+2=8$	9	x	$\frac{2}{5}$	2

A partir daí, podemos escrever a seguinte proporção: $\frac{8}{x}=\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{6}\cdot\frac{3/5}{2/5}\cdot\frac{2}{1} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ dias.

Portanto, a nova equipe trabalhou no 10º dia $\frac{1}{3}$ de um dia de 9 horas de trabalho, ou seja, 3 horas.

14) Gabriel aplicou R$ 6.500,00 a juros simples em dois bancos. No banco A, ele aplicou uma parte a 3% ao mês durante $\frac{5}{6}$ de um ano; no banco B, aplicou o restante a 3,5% ao mês, durante $\frac{3}{4}$ de um ano.
O total de juros que recebeu nas duas aplicações foi de R$ 2.002,50.
Com base nessas informações, é correto afirmar que
a) é possível comprar um televisor de R$ 3.100,00 com a quantia aplicada no banco A.
b) o juro recebido com a aplicação no banco A foi menor que R$ 850,00.
c) é possível comprar uma moto de R$ 4.600,00 com a quantia recebida pela aplicação no banco B.
d) o juro recebido com a aplicação no banco B foi maior que R$ 1.110,00.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja x a parte aplicada no banco A e $(6500-x)$ a parte aplicada no banco B.
Os juros obtidos a partir da aplicação no banco A, durante $\frac{5}{6}\cdot 12=10$ meses, é $J_A=x\cdot\frac{3}{100}\cdot 10=0,3x$.
Os juros obtidos a partir da aplicação no banco B, durante $\frac{3}{4}\cdot 12=9$ meses, é $J_B=(6500-x)\cdot\frac{3,5}{100}\cdot 9=2047,5-0,315x$.
O total de juros recebidos nas duas aplicações foi de R$ 2.002,50, então

$J_A + J_B = 0,3x + (2047,5 - 0,315x) = 2002,5 \Leftrightarrow 0,015x = 45 \Leftrightarrow x = 3000$.

Portanto, a quantia aplicada no banco A foi R$ 3.000,00 e rendeu juros de $J_A = 0,3 \cdot 3000 = 900$ reais; a quantia aplicada no banco B foi de R$ 3.500,00 e rendeu juros de $J_B = 2002,50 - 900 = 1102,50$ reais.

O montante obtido ao final da aplicação no banco B foi $M_B = 3500,00 + 1102,50 = 4602,50$ reais. Portanto, é possível comprar uma moto de R$ 4.600,00 com a quantia recebida pela aplicação no banco B.

15) Pitágoras e Tales possuem hoje, cada uma, certa quantia em reais. Se Pitágoras desse para Tales 50 reais, eles ficariam com a mesma quantia em reais, cada um. Porém se Tales desse para Pitágoras 100 reais, Tales passaria a ter $\frac{1}{4}$ da quantia de Pitágoras.

Dessa forma, é correto afirmar que

a) a quantia que os dois possuem hoje, juntos, é menor que 600 reais.

b) Pitágoras possui hoje, $\frac{2}{3}$ do que Tales possui.

c) Tales possui hoje, mais que 220 reais.

d) a diferença entre os valores que eles possuem hoje é menor que 100 reais.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Sejam P e T as quantias que Pitágoras e Tales possuem hoje, respectivamente, então

$P - 50 = T + 50 \Leftrightarrow P - T = 100$

$T - 100 = \frac{1}{4} \cdot (P + 100) \Leftrightarrow 4T - P = 500$

Adicionando-se as duas equações, temos: $3T = 600 \Leftrightarrow T = 200$ e $P - 200 = 100 \Leftrightarrow P = 300$.

Assim, Pitágoras possui, hoje, $P = 300$ reais e Tales possui $T = 200$ reais. Portanto, a quantia que os dois possuem hoje, juntos, é menor que 600 reais.

16) Lucas e Mateus são apaixonados por futebol. Eles praticam futebol no quintal de casa, que é totalmente plano e possui uma rede de 3 m de altura.

Numa brincadeira, Mateus posiciona a bola a 4 m da rede e Lucas varia sua posição em lado oposto à rede, aproximando-se ou afastando-se dela, conservando uma mesma linha reta com a bola, perpendicular à rede.
Mateus lança a bola para Lucas, com um único toque na bola, até que ela atinja o chão, sem tocar a rede.
Considere um plano cartesiano em que:
• cada lançamento realizado por Mateus é descrito por uma trajetória parabólica;
• Lucas e o ponto de partida da bola estão no eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ e
• a posição da bola é um ponto (x,y) desse plano, onde $y=f(x)$ é a altura atingida pela bola, em metros, em relação ao chão.
Assinale, dentre as alternativas abaixo, aquela que tem a lei de uma função f que satisfaz às condições estabelecidas na brincadeira de Lucas e Mateus.

a) $f(x)=-\dfrac{x^2}{8}+2$

b) $f(x)=-\dfrac{3x^2}{16}+3$

c) $f(x)=-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x+15}{4}$

d) $f(x)=-0,1x^2+0,2x+4,8$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Como em todas as opções o coeficiente do segundo grau da função f é negativo, podemos supor que o eixo y está orientado para cima e, sem perda de generalidade, que o eixo x para a esquerda.
Sejam $f(x)=ax^2+bx+c$, x_M a abscissa de Mateus e (x_M+4) a abscissa da rede, então $f(x_M)=0$ e $f(x_M+4)>3$. Assim, temos:

$$f(x_M)=ax_M^2+bx_M+c=0$$

$$f(x_M+4)=a(x_M+4)^2+b(x_M+4)+c=ax_M^2+bx_M+c+8ax_M+16a+4b=8ax_M+16a+4b>3$$

Entretanto, para que a bola passe sobre a rede, x_M deve ser a menor raiz da função f. Como $a<0$, a menor raiz é $x_M=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, então

$$8a\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+16a+4b>3 \Leftrightarrow -4b+4\sqrt{\Delta}+16a+4b>3 \Leftrightarrow 4\sqrt{\Delta}>3-16a$$

Vamos testar essa desigualdade em cada uma das opções:

a) $f(x)=-\dfrac{x^2}{8}+2 \Rightarrow 4\sqrt{0^2-4\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)\cdot 2}=4<5=3-16\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)$ (não convém)

b) $f(x)=-\dfrac{3x^2}{16}+3 \Rightarrow 4\sqrt{0^2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{16}\right)\cdot 3}=6=3-16\cdot\left(-\dfrac{3}{16}\right)$ (não convém)

c) $f(x)=-\frac{x^2}{16}+\frac{x+15}{4}\Rightarrow 4\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot\frac{15}{4}}=4=3-16\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)$ (não convém)

d) $f(x)=-0{,}1x^2+0{,}2x+4{,}8\Rightarrow 4\sqrt{0{,}2^2-4\cdot(-0{,}1)\cdot 4{,}8}=5{,}6>4{,}6=3-16\cdot(-0{,}1)$

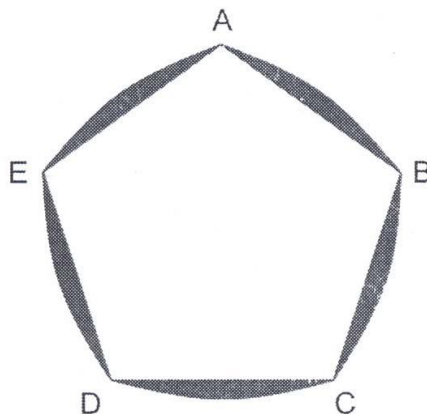
Logo, a função da alternativa (d) pode estar correta. Vamos testá-la para confirmar isso.

$f(x)=-0{,}1x^2+0{,}2x+4{,}8=0\Leftrightarrow x=-6 \vee x=8\Rightarrow x_M=-6$

A abscissa da rede é $x_M+4=-6+4=-2$ e a ordenada da função sobre a rede é

$f(-2)=-0{,}1\cdot(-2)^2+0{,}2\cdot(-2)+4{,}8=4>3$.

Portanto, a função $f(x)=-0{,}1x^2+0{,}2x+4{,}8$ satisfaz às condições do enunciado.

17) Na figura abaixo, ABCDE é um pentágono regular de lado a e $AB=BC=CD=DE=EA$ são arcos de circunferência cujo raio mede a.

Assim, a área hachurada nessa figura, em função de a, é igual a

a) $\frac{5a^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

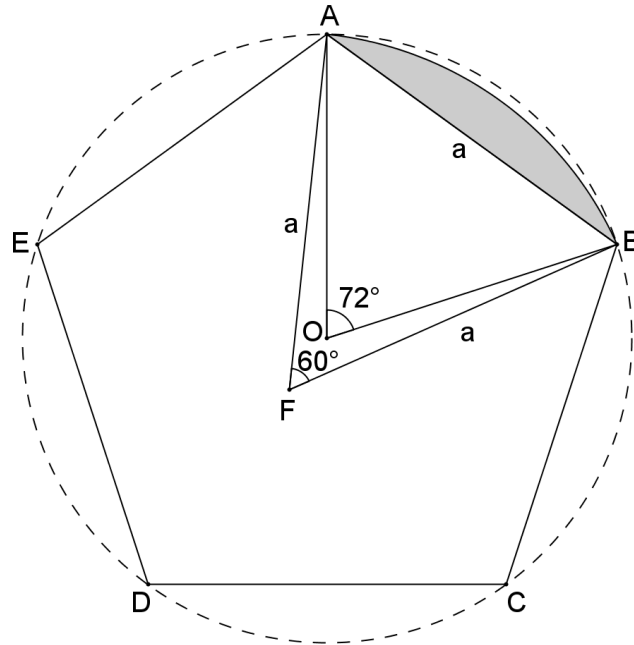
b) $5a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\frac{a^2}{4}\left(4\pi-5\sqrt{3}\right)$

d) $a^2\left(4\pi-5\sqrt{3}\right)$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Observe inicialmente que os arcos de circunferência não formam a circunferência circunscrita ao pentágono, pois um pentágono regular de lado a não está inscrito em uma circunferência de raio a. (Lembre que $l_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$).

Na figura, o ponto O é o centro da circunferência circunscrita ao pentágono regular ABCDE e F o centro da circunferência de raio a e que passa por A e B, ou seja, que contém o arco $\overset{\frown}{AB}$.
Como $\overline{FA} = \overline{FB} = \overline{AB} = a$, então o triângulo AFB é equilátero e a região hachurada é um segmento circular de 60º em uma circunferência de raio a.
Portanto, a área hachurada é igual a $S = 5 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \pi a^2 - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{5a^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ unidades de área.

18) Uma mãe dividiu a quantia de R$ 2.100,00 entre seus três filhos de 3, 5 e 6 anos. A divisão foi feita em partes inversamente proporcionais às idades de cada um.
Dessa forma, é verdade que
a) o filho mais novo recebeu 100 reais a mais que a soma dos valores recebidos pelos outros dois filhos.
b) o filho mais velho recebeu 20% a menos que o filho do meio.
c) a quantia que o filho do meio recebeu é 40% do que recebeu o mais novo.
d) se a divisão fosse feita em partes iguais, o filho mais velho teria sua parte acrescida de 40% em relação ao que realmente recebeu.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Sejam x, y e z, as partes do filho mais novo, do meio e mais velho, respectivamente, então temos:

$$\frac{x}{1/3} = \frac{y}{1/5} = \frac{z}{1/6} \Leftrightarrow 3x = 5y = 6z = 30k \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10k \\ y = 6k \\ z = 5k \end{cases}$$

onde adotamos 10k como constante de proporcionalidade para facilitar as contas.
Como a quantia dividida foi R$ 2.100,00, então $x + y + z = 10k + 6k + 5k = 2100 \Leftrightarrow k = 100$.
Portanto, $x = 1000$, $y = 600$ e $z = 500$.

a) FALSA, pois o filho mais novo recebeu 100 reais a menos que a soma dos valores recebidos pelos outros dois filhos.
b) FALSA, pois $20\% \cdot 600 = 120 \neq 100$.
c) FALSA, pois $40\% \cdot 1000 = 400 \neq 600$.
d) VERDADEIRA, pois $\frac{700-500}{500} = \frac{2}{5} = 40\%$.

19) Samuel possui 12 palitos iguais e resolveu formar um único triângulo por vez, usando os 12 palitos sem parti-los.
Ele verificou que é possível formar x triângulos retângulos, y triângulos isósceles, z triângulos equiláteros e w triângulos escalenos.
A soma $x+y+z+w$ é igual a
a) 7
b) 6
c) 5
d) 4

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Como os palitos não podem ser partidos, os lados dos triângulos devem ser formados por um número inteiro de palitos.
Sejam os números inteiros positivos $a \geq b \geq c$ as medidas dos lados de um triângulo formado conforme descrito no enunciado e adotando o comprimento de 1 palito como unidade de medida, então $a+b+c=12 \Rightarrow a+a+a \geq a+b+c=12 \Leftrightarrow a \geq 4$.
Além disso, pela desigualdade triangular, temos: $a < b+c \Leftrightarrow 2a < a+b+c=12 \Leftrightarrow a < 6$.
Portanto, $a \in \{4,5\}$.
Considerando $a \geq b \geq c$ temos as seguintes possibilidades $(a,b,c) \in \{(5,5,2);(5,4,3);(4,4,4)\}$.
O triângulo cujos lados têm medidas $(5,5,2)$ é isósceles.
O triângulo cujos lados têm medidas $(5,4,3)$ é retângulo e escaleno.
O triângulo cujos lados têm medidas $(4,4,4)$ é isósceles e equilátero.
Assim, $x=1$, $y=2$, $z=1$ e $z=1$, o que implica $x+y+z+w=1+2+1+1=5$.

20) Uma fábrica vende por mês 30 camisas ao preço de 25 reais cada. O custo total de cada camisa para a fábrica é de R$ 10,00.
O gerente da fábrica observou que, a cada redução de R$ 0,50 no preço unitário de cada camisa, são vendidas 5 camisas a mais.
Considerando essas observações, se a fábrica vender 150 camisas, o lucro obtido na venda de cada camisa é de y%.
O número de divisores naturais de y é
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Se foram vendidas 150 camisas, então houve $\frac{150-30}{5}=24$ reduções de R$ 0,50 no preço unitário. Assim, o preço de venda foi $25-24\cdot 0,50=13$ reais e o lucro obtido na venda de cada camisa foi $13-10=3$ reais, que é $\frac{3}{10}=30\%$ do preço de custo. Portanto, $y=30=2\cdot 3\cdot 5$ que possui $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=8$ divisores naturais.

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2011/2012

1) Mateus ganhou 100 g de "bala de goma". Ele come a mesma quantidade de balas a cada segundo. Ao final de 40 minutos ele terminou de comer todas as balas que ganhou. Lucas ganhou 60 g de "bala delícia", e come a mesma quantidade de balas a cada segundo. Ao final de 1 hora, ele terminou de comer todas as balas. Considere que eles começaram a comer ao mesmo tempo.
Com base nessa situação, é **FALSO** afirmar que

a) ao final de 26 minutos e 40 segundos Lucas e Mateus estavam com $\frac{100}{3}\text{ g}$ de balas cada um.
b) em 30 minutos Mateus comeu 75 g de balas.
c) quando Mateus terminou de comer as balas Lucas ainda tinha 25 g de balas.
d) ao final de 30 minutos Lucas ainda tinha 30 g de balas.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Mateus come $\frac{100}{40}=2,5\text{ g/min}$ e Lucas come $\frac{60}{60}=1\text{ g/min}$.
a) VERDADEIRA
Em $26\text{ min }40\text{s}=26\frac{2}{3}\text{min}$, Mateus comeu $26\frac{2}{3}\cdot 2,5=\frac{80}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{200}{3}\text{ g}$ e lhe restavam $100-\frac{200}{3}=\frac{100}{3}\text{ g}$ de balas, enquanto Lucas comeu $26\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{80}{3}\text{ g}$ e lhe restavam $60-\frac{80}{3}=\frac{100}{3}\text{ g}$ de balas.
b) VERDADEIRA
Em 30 min, Mateus comeu $2,5\cdot 30=75\text{ g}$ de balas.
c) FALSA
Mateus terminou de comer as balas após 40 min. Em 40 min, Lucas comeu $1\cdot 40=40\text{ g}$ e lhe restavam $60-40=20\text{ g}$ de balas.
d) VERDADEIRA
Em 30 min, Lucas comeu $1.30=30\text{ g}$ e ainda lhe restavam $60-30=30\text{ g}$ de balas.

2) Considere a área S da parte sombreada no triângulo retângulo isósceles OO_1O_2.

AD, AB e BC são arcos de circunferência com centro em O_2, O e O_1, respectivamente, cujos raios medem 2r.

Das figuras abaixo, a única em que a área sombreada **NÃO** é igual a S, é

a)

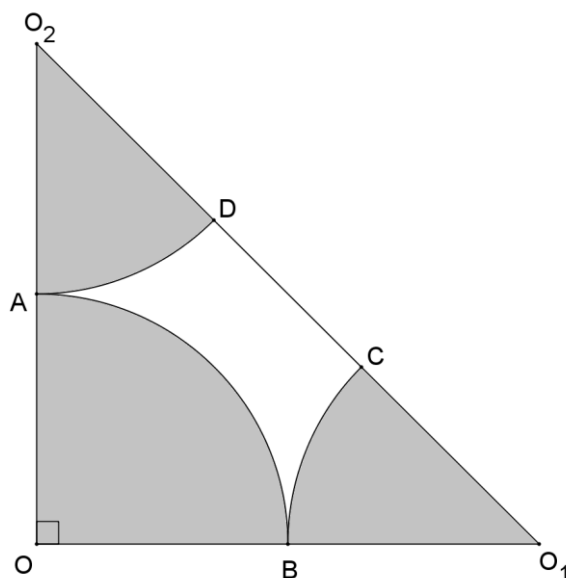
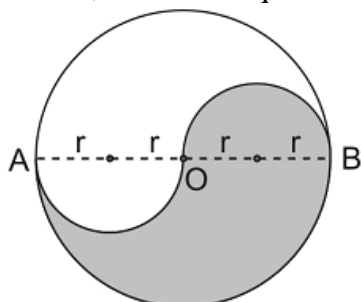
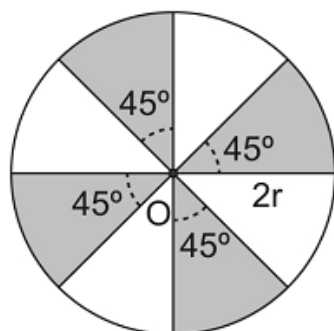
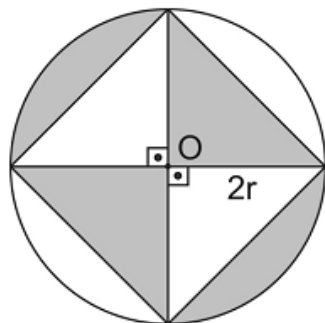
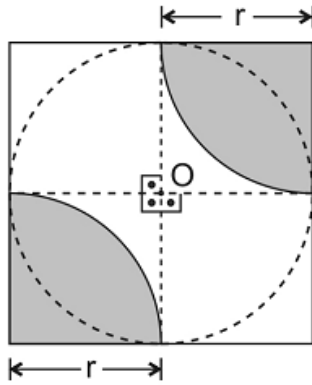
Circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e semicircunferências de diâmetros $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.

b)

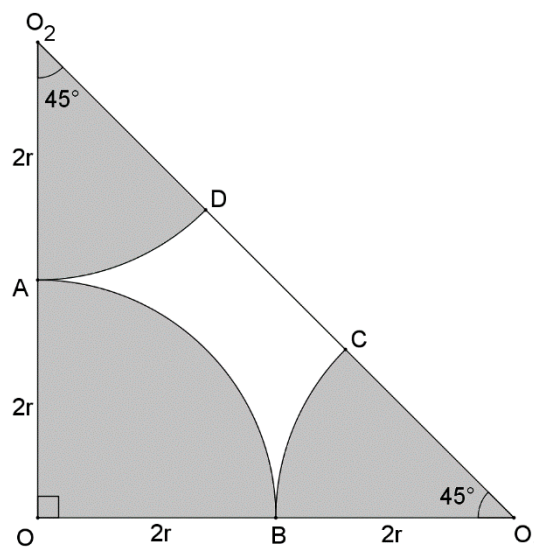
Circunferência de centro O.

c)

Circunferência de centro O.

d)

Circunferência de centro O inscrita num quadrado.
Dois setores circulares de raio r.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

A área sombreada é igual à área de um setor circular de 90º mais a área de dois setores circulares de 45º, todos de raio 2r, o que é igual à área de um setor circular de 180º e raio 2r. Logo, $S = \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (2r)^2 = 2\pi \cdot r^2$.

a) A área sombreada é igual à área de uma semicircunferência de raio 2r, ou seja, igual a S.
b) A área sombreada é igual à soma de 4 setores circulares de 45º e raio 2r, o que é igual à área de um setor circular de 180º e raio 2r, ou seja, igual a S.
c) A área sombreada é igual à soma de 2 setores circulares de 90º e raio 2r, o que é igual à área de um setor circular de 180º e raio 2r, ou seja, igual a S.
d) A área sombreada é igual à soma de 2 setores circulares de 90º e raio r, o que é igual à área de um setor circular de 180º e raio r, ou seja, $\frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{2}$ que é diferente de S.

3) Sobre a equação $kx - \frac{x-1}{k} = 1$, na variável x, é correto afirmar que

a) admite solução única se $k^2 \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}^*$.
b) NÃO admite solução se $k = 1$.
c) admite mais de uma solução se $k = -1$.
d) admite infinitas soluções se $k = 0$.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$kx - \frac{x-1}{k} = 1 \Leftrightarrow k^2x - x + 1 = k \ \wedge \ k \neq 0 \Leftrightarrow x(k^2-1) = k-1 \ \wedge \ k \neq 0$

$\Leftrightarrow x(k+1)(k-1) = k-1 \ \wedge \ k \neq 0$

Se $k = 0$, a equação é impossível e não admite solução.
Se $k = 1$, a equação é da forma $0 \cdot x = 0$, é possível e indeterminada, e tem infinitas soluções.
Se $k = -1$, a equação é da forma $0 \cdot x = -2$, é impossível e não admite solução.
Se $k \neq \pm 1 \Leftrightarrow k^2 \neq 1$ e $k \neq 0$, a equação é possível e determinada e admite uma única solução.

4) Considere os algarismos zero e 4 e os números formados apenas com os mesmos. O número x representa o menor múltiplo positivo de 15, dentre os descritos acima.

Se $\frac{x}{30}$ possui um número α de divisores positivos, então α é igual a

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$15 | x \Leftrightarrow 3 | x \ \wedge \ 5 | x$

Se x possui apenas algarismos 0 e 4, e $5 | x$, então x termina em 0.

Se $x | 3$, então a soma dos algarismos de x deve ser múltiplo de 3.

Como x é o menor número positivo com as propriedades descritas, então $x = 4440$.

A quantidade de divisores positivos de $\frac{x}{30} = \frac{4440}{30} = 148 = 2^2 \cdot 37$ é $d(148) = (2+1) \cdot (1+1) = 6$.

5) A quantidade de suco existente na cantina de uma escola é suficiente para atender o consumo de 30 crianças durante 30 dias. Sabe-se que cada criança consome, por dia, a mesma quantidade de suco que qualquer outra criança desta escola. Passados 18 dias, 6 crianças tiveram que se ausentar desta escola por motivo de saúde.

É correto afirmar que, se não houver mais ausências nem retornos, a quantidade de suco restante atenderá o grupo remanescente por um período de tempo que somado aos 18 dias já passados, ultrapassa os 30 dias inicialmente previstos em

a) 10%
b) 20%
c) 5%
d) 15%

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Supondo que cada criança consome uma quantidade x de suco por dia. Assim, a quantidade de suco existente na cantina inicialmente é $30 \cdot 30 \cdot x = 900x$.
Nos primeiros 18 dias, as 30 crianças consumiram $18 \cdot 30 \cdot x = 540x$ e restou $900x - 540x = 360x$.
Com a ausência de 6 crianças, o número total de crianças passou a ser $30 - 6 = 24$. Portanto, a quantidade de suco restante atende o grupo durante $\frac{360x}{24x} = 15$ dias.
O total de dias é $18 + 15 = 33$ dias que ultrapassa os 30 dias inicialmente previstos em $\frac{33-30}{30} \cdot 100\% = 10\%$.

6) Considere os números reais

$$x = \sqrt{2,\overline{7}}$$

$$y = \left(\sqrt{0,25} + 16^{-\frac{3}{4}}\right)^{-1}$$

$$z = \frac{\left(-2^2\right)^{2^3} - \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{3^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}}}}{-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}\right]^2}$$

É **FALSO** afirmar que

a) $\frac{z}{y} < -\frac{3}{2}$

b) $x - y < \frac{1}{5}$

c) $x + z < 0$

d) $x + y + z \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$x = \sqrt{2,\overline{7}} = \sqrt{\frac{27-2}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$y = \left(\sqrt{0,25} + 16^{-\frac{3}{4}}\right)^{-1} = \left(0,5 + \left(2^4\right)^{-\frac{3}{4}}\right)^{-1} = \left(0,5 + 2^{-3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{5}$$

$$z=\frac{\left(-2^2\right)^{2^3}-\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{3^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}}}}{-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}\right]^2}=\frac{\left(-2^2\right)^8-\sqrt[15]{2^{9\cdot 5^2}}}{-\left[2^7\right]^2}=\frac{2^{16}-2^{\frac{9\cdot 25}{15}}}{-2^{14}}=\frac{2^{16}-2^{15}}{-2^{14}}=\frac{2^{15}\cdot(2-1)}{-2^{14}}=-2$$

a) FALSO: $\frac{z}{y}=\frac{-2}{8/5}=-\frac{5}{4}>-\frac{3}{2}$

b) VERDADEIRA: $x-y=\frac{5}{3}-\frac{8}{5}=\frac{1}{15}<\frac{1}{5}$

c) VERDADEIRA: $x+z=\frac{5}{3}+(-2)=-\frac{1}{3}<0$

d) VERDADEIRA: $x+y+z=\frac{5}{3}+\frac{8}{5}+(-2)=\frac{19}{15}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow x+y+z=\frac{19}{15}\notin(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$

7) O conjunto solução da equação $-x+\sqrt{7+\frac{x}{2}}=-14$ está contido em

a) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,10<x<18\}$
b) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,17<x<25\}$
c) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,24<x<32\}$
d) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,31<x<39\}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

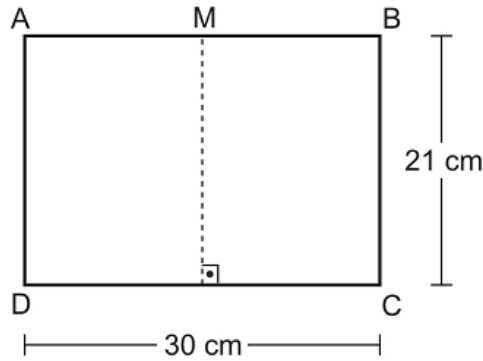
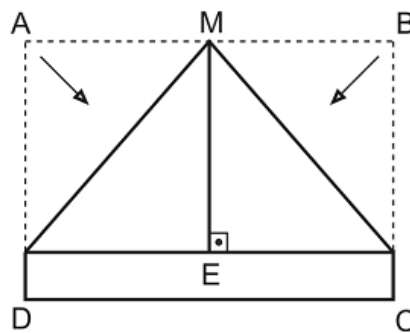
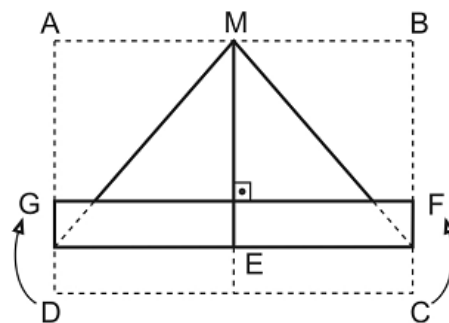
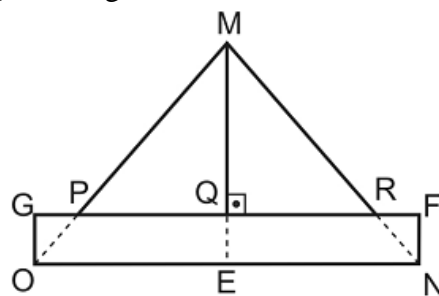
$$-x+\sqrt{7+\frac{x}{2}}=-14\Leftrightarrow\sqrt{7+\frac{x}{2}}=x-14\Leftrightarrow\left(\sqrt{7+\frac{x}{2}}\right)^2=(x-14)^2\ \wedge\ 7+\frac{x}{2}\geq 0\ \wedge\ x-14\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7+\frac{x}{2}=x^2-28x+196\ \wedge\ x\geq -14\ \wedge\ x\geq 14\Leftrightarrow 2x^2-57x+378=0\ \wedge\ x\geq 14$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{57\pm\sqrt{(-57)^2-4\cdot 2\cdot 378}}{2\cdot 2}=\frac{57\pm 15}{4}\ \wedge\ x\geq 14\Leftrightarrow(x=10{,}5\ \vee\ x=18)\ \wedge\ x\geq 14$$

$$\Leftrightarrow x=18\Leftrightarrow S=\{18\}\subset\{x\in\mathbb{R}\,|\,17<x<25\}$$

8) Brincando de dobraduras, Renan usou uma folha retangular de dimensões 30 cm por 21 cm e dobrou conforme o procedimento abaixo descrito.

1°) Tracejou na metade da folha e marcou o ponto M.

2°) Dobrou a folha movendo os pontos A e B para o ponto E.

3°) Em seguida, dobrou a folha movendo os pontos C e D para F e G, respectivamente.

4°) Marcou os pontos N, O, P, Q, R na figura resultante.

Segundo esses procedimentos, pode-se afirmar que a medida do segmento $\overline{MR}$, em centímetros, é igual a

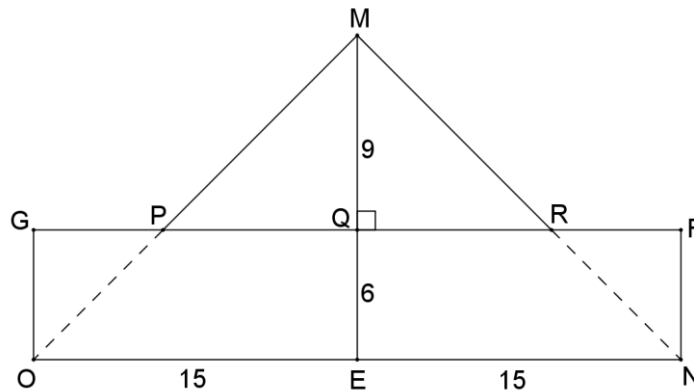
a) 6

b) $6\sqrt{2}$

c) 9

d) $9\sqrt{2}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
O ponto M é ponto médio de $\overline{AB}$, então $AM = MB = 15$.
$ME = AM = MB = 15$
$QE = 21 - 15 = 6 \Rightarrow MQ = 15 - 6 = 9$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MEN, temos:
$MN^2 = ME^2 + EN^2 = 15^2 + 15^2 = 450 \Leftrightarrow MN = 15\sqrt{2}$.
$QR \parallel EN \Rightarrow \Delta MQR \sim \Delta MEN \Rightarrow \frac{MR}{MN} = \frac{MQ}{ME} \Leftrightarrow \frac{MR}{15\sqrt{2}} = \frac{9}{15} \Leftrightarrow MR = 9\sqrt{2}\text{ cm}$.

9) Um líquido L_1 de densidade 800 g/ℓ será misturado a um líquido L_2 de densidade 900 g/ℓ. Tal mistura será homogênea e terá a proporção de 3 partes de L_1 para cada 5 partes de L_2. A densidade da mistura final, em g/ℓ, será
a) 861,5
b) 862
c) 862,5
d) 863

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Se a proporção dos líquidos na mistura é de 3 partes de L_1 para cada 5 partes de L_2, então podemos supor que $V_1 = 3x\ \ell$ e $V_2 = 5x\ \ell$, respectivamente, são os volumes dos líquidos L_1 e L_2 na mistura. Assim, a massa do líquido L_1 na mistura é $M_1 = 3x \cdot 800 = 2400x\text{ g}$ e a massa do líquido L_2 na mistura é $M_2 = 5x \cdot 900 = 4500x\text{ g}$.

A densidade da mistura final é $d_{mistura} = \frac{M_1 + M_2}{V_1 + V_2} = \frac{2400x + 4500x}{3x + 5x} = 862,5\ g/\ell$.

Esse resultado poderia ser obtido diretamente efetuando a média aritmética ponderada das densidades, sendo os pesos a parte de cada um dos líquidos na mistura.

$d = \frac{3 \cdot 800 + 5 \cdot 900}{3+5} = 862,5 \text{ g}/\ell$.

10) Em um prédio de 90 andares, numerados de 1 a 90, sem contar o térreo, existem 4 elevadores que são programados para atender apenas determinados andares. Assim, o elevador
O para nos andares múltiplos de 11;
S para nos andares múltiplos de 7;
C para nos andares múltiplos de 5; e
T para em todos os andares.
Todos esses elevadores partem do andar térreo e funcionam perfeitamente de acordo com sua programação.
Analise as afirmativas abaixo, classificando cada uma em V (verdadeira) ou F (falsa).
( ) No último andar para apenas 1 elevador.
( ) Não há neste prédio um andar em que parem todos os elevadores, com exceção do próprio térreo.
( ) Existem, neste prédio, 4 andares em que param 3 elevadores, com exceção do próprio térreo.
Tem-se a sequência correta em
a) F – V – V
b) F – V – F
c) V – F – V
d) F – F – V

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
(F) No último andar para apenas 1 elevador.
Como $11 \nmid 90$, $7 \nmid 90$ e $5 | 90$, os elevadores C e T param no 90º andar, ou seja, 2 elevadores.
(V) Não há neste prédio um andar em que parem todos os elevadores, com exceção do próprio térreo.
Para que, em um determinado andar, parem todos os elevadores, esse andar deve ser múltiplo de 11, 7 e 5, ou seja, deve ser múltiplo do $\text{mmc}(11,7,5) = 385$. Logo, não há neste prédio um andar em que parem todos os elevadores.
(V) Existem, neste prédio, 4 andares em que param 3 elevadores, com exceção do próprio térreo.
Os andares em que param 3 elevadores são os múltiplos de $\text{mmc}(11,7) = 77$, ou seja, o 77º andar onde param os elevadores O, S e T; os múltiplos do $\text{mmc}(11,5) = 55$, ou seja, o 55º andar onde param os elevadores O, C e T; e os múltiplos de $\text{mmc}(7,5) = 35$, ou seja, o 35º e o 70º andares onde param os elevadores S, C e T. Portanto, há 4 andares em que param 3 elevadores.

11) Na festa junina do Bairro Jardim foi montada uma barraca que vende pasteis e suco. Sabe-se que cada pastel teve um custo de R$ 0,50 e o suco já preparado para o consumo foi comprado em garrafas de $600 \text{ m}\ell$ por R$ 1,20 cada.
O proprietário resolveu vender o suco em copos de $250 \text{ m}\ell$ ao preço de 2 reais cada copo e um pastel era oferecido em cortesia para cada copo de suco consumido.
Ao final da festa, foram consumidas nessa barraca todas as 100 garrafas de suco que o proprietário havia adquirido e todos os clientes aceitaram a cortesia e não sobrou nenhum pastel.

É correto afirmar que, se não houve outras despesas, e o proprietário dessa barraca teve um lucro x relativo somente à venda dos sucos com suas cortesias, então a soma dos algarismos de x é igual a
a) 3
b) 6
c) 9
d) 13

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Se foram adquiridas 100 garrafas de suco, o volume total de suco foi $100 \cdot 600 = 60000 \text{ m}\ell$, que permite vender um total de $\frac{60000}{250} = 240$ copos de suco de $250 \text{ m}\ell$ e, portanto, oferecidos como cortesia 240 pasteis.
Assim, a receita foi $R = 240 \cdot 2,00 = 480,00$ reais e a despesa foi $D = 100 \cdot 1,20 + 240 \cdot 0,50 = 240,00$ reais. Logo, o lucro (diferença entre receita e despesa) foi $x = R - D = 480 - 240 = 240,00$ reais, cuja soma dos algarismos é 6.

12) Sr. Luiz pretende dividir a quantia x reais entre seus netos. Observou que se der 50 reais para cada um lhe faltarão 50 reais e se der 40 reais para cada um, lhe sobrarão 40 reais. Com base nisso, é correto afirmar que
a) Sr. Luiz possui menos de 500 reais para dividir entre seus netos.
b) Sr. Luiz tem mais de 10 netos.
c) se um dos netos do Sr. Luiz não quiser o dinheiro, os demais receberão menos de 45 reais cada um.
d) é possível que o Sr. Luiz divida a quantia x em partes iguais entre todos os seus netos, de forma que não lhe sobre nenhum centavo.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Seja n a quantidade de netos do Sr. Luiz.

$$\begin{cases} 50 \cdot n = x + 50 \\ 40 \cdot n = x - 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 50n - 40n = (x + 50) - (x - 40) \Leftrightarrow 10n = 90 \Leftrightarrow n = 9$$

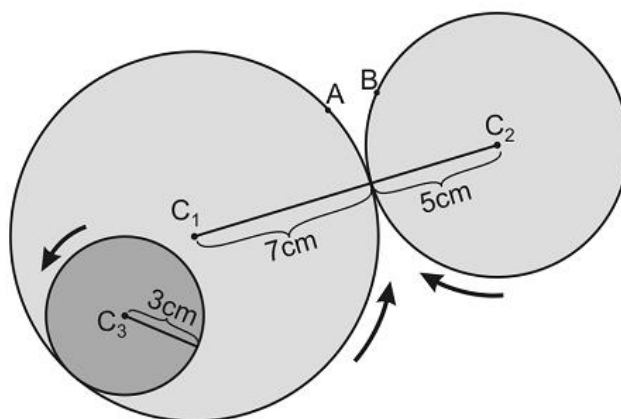
$$\Rightarrow x = 40n + 40 = 40 \cdot 9 + 40 = 400$$

A quantia que o Sr. Luiz possui para dividir entre os netos é $x = 400$ reais, logo a alternativa (a) está correta.
Como o Sr. Luiz possui $n = 9$ netos, a alternativa (b) está incorreta.
Se um dos netos não quiser o dinheiro os demais receberão $\frac{400}{9-1} = 50$ reais cada um. Logo, a alternativa (c) está incorreta.
Se o dinheiro for todo dividido entre os netos, o valor para cada neto é $\frac{400}{9} = 44,444\ldots$, ou seja, não é possível dividir sem sobra de alguns centavos. Na prática ele teria de dar R$ 44,44 para cada neto e sobrariam 4 centavos. Logo, a alternativa (d) está incorreta.

13) Uma pessoa foi realizar um curso de aperfeiçoamento. O curso foi ministrado em x dias nos períodos da manhã e da tarde desses dias. Durante o curso foram aplicadas 9 avaliações que ocorreram em dias distintos, cada uma no período da tarde ou no período da manhã, nunca havendo mais de uma avaliação no mesmo dia. Houve 7 manhãs e 4 tardes sem avaliação. O número x é divisor natural de
a) 45
b) 36
c) 20
d) 18

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Observe que o número de manhãs e o número de tardes é o igual ao número x de dias.
Se houve 7 manhãs sem avaliação, então houve $(x-7)$ manhãs com avaliação.
Se houve 4 tardes sem avaliação, então houve $(x-4)$ tardes com avaliação.
Como foram aplicadas 9 avaliações, então $(x-7)+(x-4)=9 \Leftrightarrow 2x=20 \Leftrightarrow x=10$.
Logo, o número $x=10$ é um divisor natural de 20.

14) Os círculos abaixo têm centros fixos em C_1, C_2, C_3 e se tangenciam conforme a figura. Eles giram conforme a direção das setas, e não derrapam nos pontos de contato. Num certo momento, os pontos A e B das circunferências de centros C_1 e C_2 se encontram no ponto de tangência. A partir desse momento até A e B se encontrarem novamente, o número de voltas dadas pelo círculo de centro em C_3 é

a) 11
b) $11\frac{1}{3}$
c) $11\frac{2}{3}$
d) 12

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
O comprimento de C_1 é $2\pi\cdot 7=14\pi$ cm e o comprimento de C_2 é $2\pi\cdot 5=10\pi$ cm. Os pontos A e B percorrem sempre a mesma distância. Quando essa distância for, pela primeira vez, um múltiplo dos comprimentos das duas circunferências, os pontos vão voltar a se encontrar.
Como $14\pi\cdot 5=10\pi\cdot 7$ e $\text{mdc}(5,7)=1$, essa é a primeira vez que um múltiplo comum ocorre. Quando a circunferência C_1 percorre a distância 70π cm, a circunferência C_3 percorre a mesma distância e, como seu comprimento é $2\pi\cdot 3=6\pi$ cm, a circunferência C_3 dará $\frac{70\pi}{6\pi}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$ voltas.

15) Sr. José tinha uma quantia x em dinheiro e aplicou tudo a juros simples de 5% ao ano. Terminado o primeiro ano, reuniu o capital aplicado e os juros e gastou $\frac{1}{3}$ na compra de material para construção de sua casa. O restante do dinheiro investiu em duas aplicações: colocou $\frac{5}{7}$ a juros simples de 6% ao ano e o que sobrou a juros simples de 5% ao ano, recebendo assim, 700 reais de juros relativos a esse segundo ano. Pode-se afirmar, então que a quantia x que o Sr. José tinha é um número cuja soma dos algarismos é
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13

RESPOSTA: d

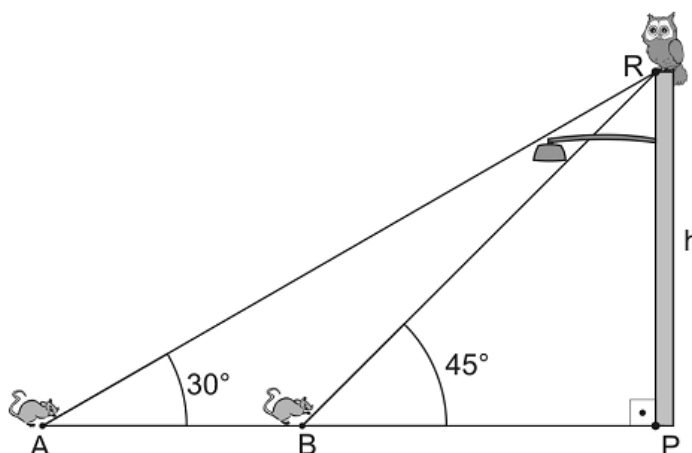
RESOLUÇÃO:
Após o primeiro ano, o montante resultante foi $(1+5\%)\cdot x=1,05x$.
O valor gasto na compra de material de construção foi $\frac{1}{3}\cdot 1,05x=0,35x$ e restou $0,7x$.
O valor aplicado a juros simples de 6% ao ano foi $\frac{5}{7}\cdot 0,7x=0,5x$. Os juros resultantes foram $6\%\cdot 0,5x=0,03x$.
O valor aplicado a juros simples de 5% ao ano foi $\frac{2}{7}\cdot 0,7x=0,2x$. Os juros resultantes foram $5\%\cdot 0,2x=0,01x$.
O total de juros relativos ao segundo ano foram $0,03x+0,01x=700 \Leftrightarrow 0,04x=700 \Leftrightarrow x=17500$ reais, cuja soma dos algarismos é $1+7+5+0+0=13$.

16) Um reservatório d'água na forma de um paralelepípedo reto de base quadrada e cuja altura é metade do lado da base, está com 80% de sua capacidade máxima ocupada. Se fosse preciso acabar de encher este reservatório seriam necessários 500 baldes iguais cheios d'água com capacidade de $12800\ m\ell$ cada. Com base nesses dados, é correto afirmar que a altura da água que há neste reservatório

a) é exatamente 15 dm.
b) é exatamente 1600 mm.
c) NÃO passa de 145 cm.
d) está a 0,5 m de atingir seu máximo.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Como o reservatório está com 80% da sua capacidade ocupada, então os 20% restantes correspondem a $500 \cdot 12800\ m\ell = 6400000\ m\ell = 6400\ \ell$. Se V é o volume do reservatório, então $20\% \cdot V = 6400 \Leftrightarrow V = 32000\ \ell = 32000\ dm^3$.
Se o lado da base é igual a 2x, então a altura é igual a x e o volume do reservatório é $V = (2x)^2 \cdot x = 4x^3 = 32000\ dm^3 \Leftrightarrow x = 20\ dm$.
A altura da água no reservatório é $80\% \cdot x = 80\% \cdot 20\ dm = 16\ dm = 1600\ mm$.

17) Uma coruja está pousada em R, ponto mais alto de um poste, a uma altura h do ponto P, no chão. Ela é vista por um rato no ponto A, no solo, sob um ângulo de 30°, conforme mostra a figura abaixo.

O rato se desloca em linha reta até o ponto B, de onde vê a coruja, agora sob um ângulo de 45° com o chão e a uma distância $\overline{BR}$ de medida $6\sqrt{2}$ metros. Com base nessas informações, estando os pontos A, B e P alinhados e desprezando-se a espessura do poste, pode-se afirmar então que a medida do deslocamento $\overline{AB}$ do rato, em metros, é um número entre

a) 3 e 4
b) 4 e 5
c) 5 e 6
d) 6 e 7
e) 7 e 8

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O triângulo BPR é um triângulo retângulo isósceles, então $BP = PR = h$ e, pelo teorema de Pitágoras, temos: $h^2 + h^2 = (6\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow h^2 = 36 \Leftrightarrow h = 6\text{ m}$.
No triângulo APR, temos:
$\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{PR}{AP} = \frac{PR}{AB+BP} \Leftrightarrow \operatorname{tg}30^\circ = \frac{h}{AB+h} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{AB+6} \Leftrightarrow AB = 6(\sqrt{3}-1)\text{ m}$.
Mas, $1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \Leftrightarrow 0,7 < \sqrt{3}-1 < 0,8 \Leftrightarrow 4,2 < 6(\sqrt{3}-1) < 4,8 \Rightarrow 4 < AB < 5$.

18) De 2002 a 2010 “a carga tributária saltou de 32,7% para 37% (...) O brasileiro médio tem de trabalhar 148 dias por ano para pagar seus impostos.”
(Fonte: Revista Veja de 05/01/2011, pág. 78)
O gráfico abaixo representa o volume de tributos (em percentual) cobrados pelo governo de 2002 a 2010.

Adaptado da Revista Veja, nº 1 de 05/01/2011, pág. 79

Com base nas informações do gráfico, marque a alternativa **FALSA**.
a) O crescimento do volume de tributos do ano de 2002 ao ano de 2004 foi maior que o do ano de 2006 ao ano de 2008.
b) Se o volume de tributos do ano de 2010 é x% maior que o volume de tributos do ano de 2002, então $x > 12$.
c) O volume de tributos do ano de 2004 é maior que 0,9 do volume de tributos do ano de 2010.
d) Supondo que do ano de 2008 ao ano de 2011 o aumento anual do volume de tributos seja constante e que o volume de tributos do ano de 2011 seja p, então $p > 38\%$.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
a) VERDADEIRA
O crescimento do volume de tributos do ano de 2002 ao ano de 2004 foi $\frac{33,5\% - 32,7\%}{32,7\%} \cdot 100\% = \frac{0,8}{32,7} \cdot 100\% \approx 2,4\%$.

O crescimento do volume de tributos do ano de 2006 ao ano de 2008 foi $\frac{35,2\%-34,5\%}{34,5\%}\cdot 100\%=\frac{0,7}{34,5}\cdot 100\%\approx 2\%$.

b) VERDADEIRA

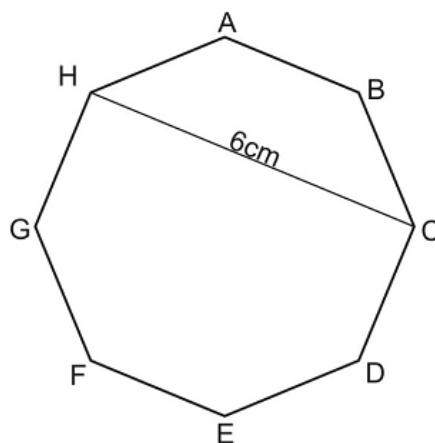
$x\%=\frac{37\%-32,7\%}{32,7\%}\cdot 100\%=\frac{4,3}{32,7}\cdot 100\%\approx 13,1\%\Rightarrow x\approx 13,1>2$

c) VERDADEIRA

$0,9\cdot 37\%=33,3\%<33,5\%$

d) FALSA

$p-37\%=\frac{37\%-35,2\%}{2}\Leftrightarrow p=37,9\%<38\%$

19) A figura abaixo representa um octógono regular tal que $\overline{CH}=6\text{ cm}$.

A área desse polígono, em cm^2, é igual a

a) $56(\sqrt{2}-1)$

b) $64(\sqrt{2}-1)$

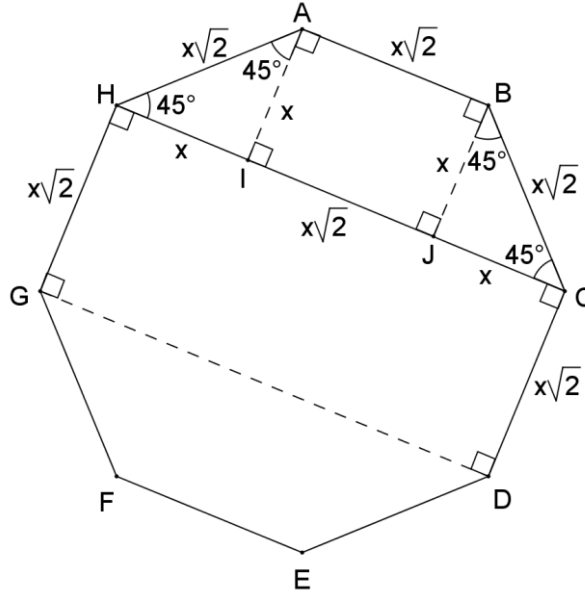
c) $72(\sqrt{2}-1)$

d) $80(\sqrt{2}-1)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Inicialmente observemos que o ângulo interno do octógono regular é $\hat{A}_i = \frac{180^\circ(8-2)}{8} = 135^\circ$.

Como $\overline{HC} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{AH} = \overline{BC}$, o quadrilátero ABCH é um trapézio isósceles.

Os segmentos $\overline{AI}$ e $\overline{BJ}$ perpendiculares a $\overline{HC}$ determinam dois triângulos retângulos isósceles AIH e BJC, respectivamente, e o retângulo ABJI.

Sendo $\overline{AI} = \overline{BJ} = x$, então $\overline{HI} = \overline{CJ} = x$ e $\overline{AH} = \overline{BC} = \overline{AB} = \overline{IJ} = x\sqrt{2}$ (lado do octógono). Assim, temos:

$$\overline{HC} = \overline{HI} + \overline{IJ} + \overline{JC} = x + x\sqrt{2} + x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Observando a figura, notamos que a área do octógono é igual à soma da área dos trapézios isósceles congruentes ABCH e FEDG, e do retângulo CDGH.

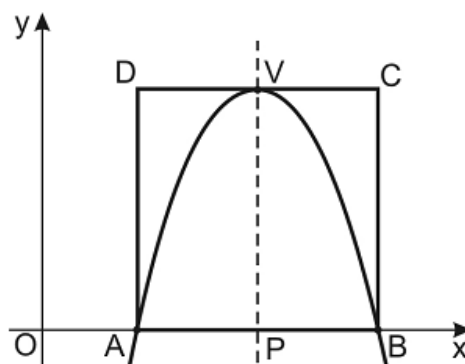
A área do trapézio isósceles ABCH é dada por:

$$S_{ABCH} = \frac{\left(\overline{CH} + \overline{AB}\right) \cdot \overline{AI}}{2} = \frac{\left(6 + 3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \sqrt{2}\right) \cdot 3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = 18\left(\sqrt{2}-1\right) = S_{FEDG}.$$

A área do retângulo CDGH é dada por $S_{CDGH} = \overline{CH} \cdot \overline{CD} = 6 \cdot 3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \sqrt{2} = 36\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Portanto, a área do octógono é

$$S_{ABCDEFGH} = S_{ABCH} + S_{FEDG} + S_{CDGH} = 2 \cdot 18\left(\sqrt{2}-1\right) + 36\left(\sqrt{2}-1\right) = 72\left(\sqrt{2}-1\right)\text{cm}^2.$$

20) Considere a parábola que representa a igualdade $y = ax^2 + bx + c$, de eixo de simetria $\overleftrightarrow{PV}$, e o quadrado ABCD indicados na figura abaixo.

Sabendo-se que os pontos A e B pertencem à parábola e ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ e sendo V o ponto onde a parábola tangencia o segmento $\overline{DC}$, o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$ é

a) 4
b) 8
c) 16
d) 20

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Se $y = ax^2 + bx + c$, então $x_V = x_P = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

O segmento $\overline{AB}$ está associado à diferença entre as raízes do trinômio do 2° grau, assim

$\overline{AB} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{-a}$.

Note que $|a| = -a$, pois a é um número negativo já que a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Como o quadrilátero ABCD é um quadrado, tem-se:

$\overline{AB} = \overline{PV} = y_V \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{\Delta}}{-a} = -\dfrac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16$.

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2010/2011

1) Considere os números positivos q, m e n, tais que $\frac{m}{n+q}=2$ e $\frac{m}{n-q}=3$. Ordenando-os, tem-se a sequência correta em

a) $m>n>q$
b) $m>q>n$
c) $n>m>q$
d) $q>n>m$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$\frac{m}{n+q}=2 \Leftrightarrow m=2n+2q$

$\frac{m}{n-q}=3 \Leftrightarrow m=3n-3q$

$\Rightarrow 2n+2q=3n-3q \Leftrightarrow n=5q$

$\Rightarrow m=2n+2q=2\cdot 5q+2q=12q$

Como $m=12q$, $n=5q$ e $q>0$, então $m>n>q$.

2) Se $x=1,0\overline{62}+\frac{\left[(-2)^{\left(2\sqrt{2}+1\right)}\right]^{\left(2\sqrt{2}-1\right)}}{64}$, então x está compreendido entre

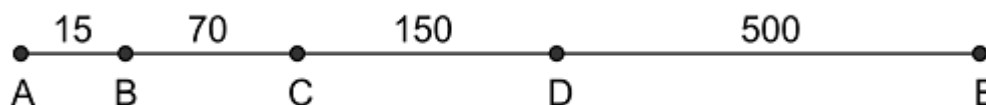
a) -1 e $-0,9$
b) $-0,9$ e $-0,8$
c) $-0,8$ e $-0,7$
d) $-0,7$ e $0,6$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$x=1,0\overline{62}+\frac{\left[(-2)^{\left(2\sqrt{2}+1\right)}\right]^{\left(2\sqrt{2}-1\right)}}{64}=1,0\overline{62}+\frac{(-2)^{(8-1)}}{64}=1,0\overline{62}+\frac{(-128)}{64}=1,0\overline{62}-2=-0,9\overline{37}$$

$\Rightarrow -1<x<-0,9$

3) Um agricultor fará uma plantação de feijão em canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.

Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância d entre todos eles fosse a mesma e a maior possível.
Se x representa o número de vezes que a distância d foi obtida pelo agricultor, então x é um número divisível por
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Para que a distância d entre os pontos seja a mesma e a maior possível, o valor de d deve ser o maior divisor comum entre os números 15, 70, 150 e 500, ou seja, $d = \text{mdc}(15, 70, 150, 500) = 5$.
O número de vezes que a distância d foi obtida pelo agricultor é dado por

$$x = \frac{15+70+150+500}{d} = \frac{735}{5} = 147 = 7 \cdot 21$$

que é um número divisível por 7.

4) Para a reforma do Ginásio de Esporte da EPCAR foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (2ª feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10º dia, 4 operários foram dispensados.
No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia e concluíram a reforma. Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folgas em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é
a) domingo.
b) segunda-feira.
c) terça-feira
d) quarta-feira

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Sabe-se que 24 operários, trabalhando 7 horas por dia durante 10 dias, executaram 40% do trabalho. Isso corresponde a $24 \cdot 7 \cdot 10 = 1680$ horas trabalhadas.
Assim, para executar 100% do trabalho são necessárias $1680 \cdot \frac{100\%}{40\%} = 4200$ horas e ainda faltam $4200 - 1680 = 2520$ horas de trabalho.

A partir do 11º dia, há $24-4=20$ operários, trabalhando 6 horas por dia. Dessa forma, são trabalhadas $20\cdot 6=120$ horas por dia e serão necessários mais $\frac{2520}{120}=21$ dias de trabalho.
Dessa forma, o trabalho levou um total de $10+21=31$ dias. Como $31=4\cdot 7+3$, então o trabalho terminou em uma quarta-feira.

Alternativamente, poderíamos montar uma regra de três composta, como segue:

Operários	Horas por dia	Dias	Percentual do trabalho
24	7	10	40%
20	6	x	60%
INV.	INV.		DIR.

Assim, temos: $\frac{10}{x}=\frac{20}{24}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{40}{60}\Leftrightarrow x=\frac{10\cdot 24\cdot 7\cdot 60}{20\cdot 6\cdot 40}=21$.
Dessa forma, o trabalho levou um total de $10+21=31$ dias. Como $31=4\cdot 7+3$, então o trabalho terminou em uma quarta-feira.

5) Lucas e Mateus ganharam de presente de aniversário as quantias x e y reais, respectivamente, e aplicaram, a juros simples, todo o dinheiro que ganharam, da seguinte forma:

(1) Mateus aplicou a quantia y durante um tempo que foi metade do que esteve aplicado a quantia x de Lucas.

(2) Mateus aplicou seu dinheiro a uma taxa igual ao triplo da taxa da quantia aplicada por Lucas.

(3) No resgate de cada quantia aplicada, Lucas e Mateus receberam o mesmo valor de juros.

Se juntos os dois ganharam de presente 516 reais, então $x-y$ é igual a

a) R$ 103,20
b) R$ 106,40
c) R$ 108,30
d) R$ 109,60

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Seja t o tempo durante o qual a quantia de Mateus foi aplicada e i a taxa da aplicação de Lucas, então podemos resumir os dados do problema na tabela seguinte:

	Lucas	Mateus
Capital inicial	x	y
Tempo de aplicação	2t	t
Taxa de juros	i	3i

Os juros recebidos por Lucas foram $J_L=x\cdot i\cdot 2t=2x\cdot i\cdot t$ e os recebidos por Mateus foram $J_M=y\cdot 3i\cdot t=3y\cdot i\cdot t$. Como ambos receberam o mesmo valor de juros, então
$J_L=J_M\Leftrightarrow 2x\cdot i\cdot t=3y\cdot i\cdot t\Leftrightarrow 2x=3y$.
Mas, sabemos que $x+y=516$. Assim, devemos resolver o seguinte sistema:

$\begin{cases} x+y=516 \\ 2x=3y \end{cases} \Rightarrow 2x+2y=1032 \Rightarrow 3y+2y=1032 \Leftrightarrow y=206,40 \wedge x=\frac{3}{2}\cdot 206,40=309,60$.

Portanto, $x-y=309,60-206,40=103,20$ reais.

6) Considere três números naturais a, b e c, nessa ordem. A soma desses números é 888, a diferença entre o primeiro e o segundo é igual ao terceiro. O terceiro deles excede o segundo em 198. O valor da diferença entre o primeiro e o terceiro é tal que excede 90 em
a) 23
b) 33
c) 43
d) 53

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} a+b+c=888 \\ a-b=c \\ c-b=198 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=888 \\ a-b-c=0 \\ -b+c=198 \end{cases}$$

$(a+b+c)+(a-b-c)=888+0 \Leftrightarrow 2a=888 \Leftrightarrow a=444$

$\Rightarrow \begin{cases} b+c=444 \\ -b+c=198 \end{cases} \Rightarrow (b+c)+(-b+c)=444+198 \Leftrightarrow 2c=642 \Leftrightarrow c=321 \wedge b=123$

Logo, a diferença entre o primeiro e o terceiro é $a-c=444-321=123$ que excede 90 em 33 unidades.

7) Se somarmos sete números inteiros pares positivos e consecutivos, obteremos 770. O número de divisores naturais do maior dos sete números citados é
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Sete números inteiros pares e consecutivos podem ser escritos na forma: $x-6$, $x-4$, $x-2$, x, $x+2$, $x+4$, $x+6$, onde x deve ser um número par maior do que 6.
A soma desses sete números é
$(x-6)+(x-4)+(x-2)+x+(x+2)+(x+4)+(x+6)=770 \Leftrightarrow 7x=770 \Leftrightarrow x=110$.
O maior desses números é $x+6=116=2^2\cdot 29$ que possui $d(116)=(2+1)\cdot(1+1)=6$ divisores naturais.

8) Analise a alternativa abaixo, considerando todas as equações na incógnita x, e, a seguir, marque a correta.

a) Na equação $x^2 - mx + n = 0 \ (m, n \in \mathbb{R})$, sabe-se que a e b são suas raízes reais. Logo, o valor de $(a+b)-(a \cdot b)$ é, necessariamente, $(n-m)$.

b) Para que a soma das raízes da equação $2x^2 - 3x + p = 0 \ (p \in \mathbb{R})$ seja igual ao produto dessas raízes, p deve ser igual a $\frac{3}{2}$.

c) Se a equação $3x^2 - 3x + m = 0 \ (m \in \mathbb{R})$ NÃO possui raízes reais, então o valor de m pode ser igual a $-\frac{3}{4}$.

d) Uma das raízes da equação $x^2 + Sx - P = 0 \ (S, P \in \mathbb{R})$ é o número 1, logo $(S-P)$ é igual a -1.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

a) INCORRETA

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 = a + b = -\frac{(-m)}{1} = m \\ \sigma_2 = a \cdot b = \frac{n}{1} = n \end{array}\right\} \Rightarrow (a+b)-(a \cdot b) = m - n$$

b) INCORRETA

A soma das raízes é $S = \sigma_1 = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$ e o produto é $P = \sigma_2 = \frac{p}{2}$. Assim, se a soma das raízes é igual ao produto, então $\frac{3}{2} = \frac{p}{2} \Leftrightarrow p = 3$.

c) INCORRETA

Se a equação $3x^2 - 3x + m = 0 \ (m \in \mathbb{R})$ NÃO possui raízes reais, então o seu discriminante Δ deve ser negativo. Assim, $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m < 0 \Leftrightarrow 12m > 9 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$. Portanto, m não pode ser igual a $-\frac{3}{4}$.

d) CORRETA

Se o número 1 é raiz de $x^2 + Sx - P = 0$, então $1^2 + S \cdot 1 - P = 0 \Leftrightarrow S - P = -1$.

9) Se $a \in \mathbb{R}_+^*$ é raiz da equação na incógnita y, $\sqrt{1 - \sqrt{y^4 - y^2}} = y - 1$, então

a) $0 < a < 1$

b) $1 < a < \frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{2} < a < 2$

d) $2 < a < \frac{5}{2}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}} = y-1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}}\right)^2 = (y-1)^2 \ \wedge \ y-1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{y^4-y^2} = y^2-2y+1 \ \wedge \ y \geq 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^2(y^2-1)} = 2y-y^2 \ \wedge \ y \geq 1$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} y\sqrt{y^2-1} = y(2-y) \ \wedge \ y \geq 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^2-1} = 2-y \ \wedge \ y \geq 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y^2-1}\right)^2 = (2-y)^2 \ \wedge \ y \geq 1 \ \wedge \ 2-y \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2-1 = 4-4y+y^2 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 2$

$\Leftrightarrow y = \frac{5}{4} \ \wedge \ 1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}$

Assim, $a = \frac{5}{4}$ e $1 < a < \frac{3}{2}$.

(*) Note que $\sqrt{y^2(y^2-1)} = |y|\sqrt{y^2-1} = y\sqrt{y^2-1}$, pois $y \geq 1$ o que implica $|y| = y$.

Alternativamente, você poderia resolver a equação irracional sem se preocupar com as condições de existência e testar as raízes obtidas ao final.

$\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}} = y-1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}}\right)^2 = (y-1)^2$

$\Leftrightarrow 1-\sqrt{y^4-y^2} = y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^4-y^2} = 2y-y^2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y^4-y^2}\right)^2 = (2y-y^2)^2$

$\Leftrightarrow y^4-y^2 = 4y^2-4y^3+y^4$

$\Leftrightarrow 4y^3-5y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2(4y-5) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0 \text{ (dupla)} \ \vee \ y = \frac{5}{4}$

Testando as duas raízes obtidas, observamos que $y=0$ não é raiz da equação original e a única raiz é $y=\frac{5}{4}$. Assim, $a=\frac{5}{4}$ e $1<a<\frac{3}{2}$.

10) No tempo $t=0$, o tanque de um automóvel está com α litros de combustível. O volume de combustível no tanque, em litros, após o carro entrar em movimento, é descrito por uma função do 2° grau em função do tempo t, em minutos.
O carro entra em movimento. Após 10 minutos do início do movimento, o tanque está com 36 litros de combustível e após 3 horas e 10 minutos do início do movimento, o volume de combustível no tanque se esgota.
Sabe-se que o gráfico dessa função toca o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ num único ponto de coordenadas (190, 0).
Dessa forma, o número α está compreendido entre
a) 40 e 42
b) 42 e 44
c) 44 e 46
d) 46 e 48

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
A função possui uma única raiz 190, então pode ser escrita na forma $V(t)=a(t-190)^2$.
Após 10 minutos do início do movimento, o tanque está com 36 litros de combustível, então

$$V(10)=36 \Leftrightarrow a(10-190)^2=36 \Leftrightarrow a=\frac{36}{180^2}=\frac{1}{900}$$

Após 3 horas e 10 minutos do início do movimento, o volume de combustível no tanque se esgota, então

$$V(3\cdot 60+10)=V(190)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{900}\cdot(190-190)^2=0$$

Note que essa informação é redundante, mas o resultado é coerente.
No tempo $t=0$, o tanque de um automóvel está com α litros de combustível.

$$\alpha=V(0)=\frac{1}{900}\cdot(0-190)^2=\frac{361}{9}=40\frac{1}{9}=40{,}111...$$

Portanto, α está entre 40 e 42.

11) Certo dia, Isabela e Ana Beatriz saíram para vender pastéis na praia. Elas tinham juntas 460 pastéis. No final do dia, verificou-se que Isabela conseguiu vender $\frac{3}{5}$ dos pastéis que levara e Ana Beatriz $\frac{5}{8}$ dos pastéis que levara.
Ao final do dia, o número de pastéis que restou para Ana Beatriz era a metade do número de pastéis que restou para Isabela.
Se Ana Beatriz, levou x pastéis para vender, então, a soma dos algarismos de x é
a) 6
b) 7

c) 8
d) 9

RESPOSTA: b

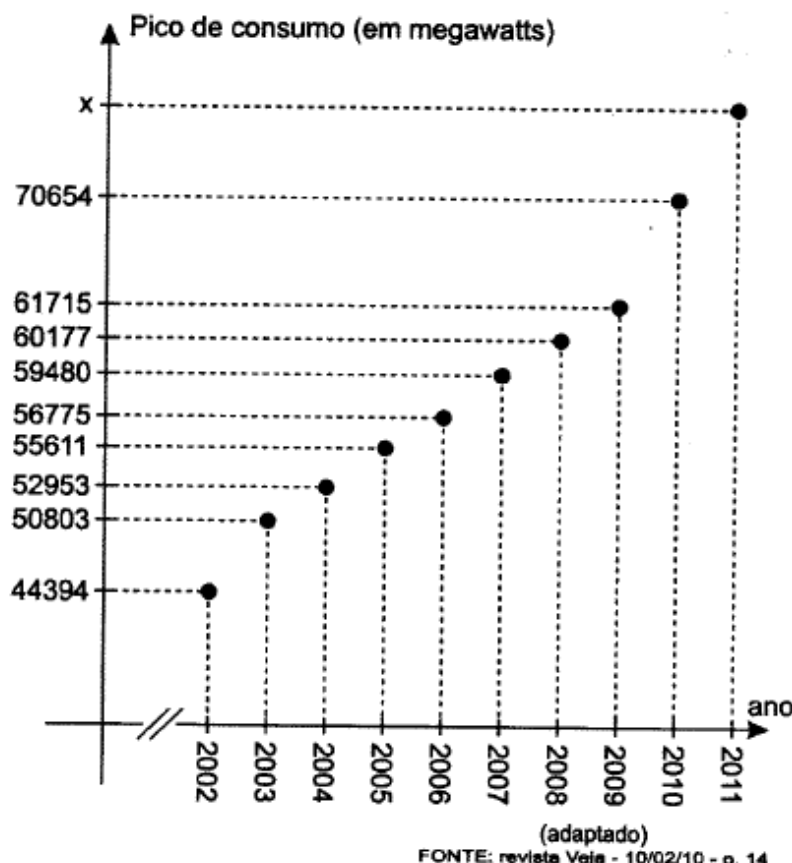
RESOLUÇÃO:
Se Ana Beatriz, levou x pastéis para vender, então Isabela levou $(460-x)$.
Se Isabela conseguiu vender $\frac{3}{5}$ dos pastéis que levara, então restaram $\frac{2}{5}\cdot(460-x)$.
Se Ana Beatriz conseguiu vender $\frac{5}{8}$ dos pastéis que levara, então restaram $\frac{3}{8}\cdot x$.
Ao final do dia, o número de pastéis que restou para Ana Beatriz era a metade do número de pastéis que restou para Isabela, então
$\frac{3}{8}\cdot x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot(460-x)\Leftrightarrow 15x=8\cdot(460-x)\Leftrightarrow 23x=8\cdot 460\Leftrightarrow x=160$.
Portanto, a soma dos algarismos de $x=160$ é $1+6+0=7$.

12) Em um certo período, o valor total da cesta básica de alimentos subiu 82% e o salário mínimo, nesse mesmo período, aumentou 30%.
Para que recupere o poder de compra da cesta básica de alimentos, o salário mínimo deverá ser aumentado em y%.
O valor de y, então, é tal que 20 está para y assim como 8 está para
a) 12
b) 16
c) 24
d) 32

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Seja V o valor inicial da cesta básica, então o valor após o aumento de 82% é $V'=(1+82\%)\cdot V=1,82V$.
Seja S o valor inicial do salário mínimo, então o valor após o aumento de 30% é $S'=(1+30\%)\cdot S=1,3S$. Após um novo aumento de y%, o valor do salário mínimo é $S"=1,3S\cdot(1+y\%)$.
Para que o poder de compra se mantenha, devemos ter
$\frac{V}{S}=\frac{V'}{S"}\Leftrightarrow\frac{V}{S}=\frac{1,82V}{1,3S\cdot(1+y\%)}\Leftrightarrow 1,3\cdot(1+y\%)=1,82\Leftrightarrow 1+y\%=1,4\Leftrightarrow\frac{y}{100}=0,4\Leftrightarrow y=40$.
Portanto, $\frac{20}{y}=\frac{8}{x}\Leftrightarrow\frac{20}{40}=\frac{8}{x}\Leftrightarrow x=16$

13) "Demanda Crescente
O consumo de energia elétrica no Brasil nunca foi tão alto. Na quinta-feira passada, atingiu seu recorde histórico. O valor é muito superior ao registrado em anos, anteriores"
(revista Veja – 10/02/10 – p.71)

O gráfico abaixo indica o pico de consumo de energia (em megawatts) na primeira quinta-feira de fevereiro dos anos de 2002 a 2010.

Analisando-se o gráfico acima e supondo-se que em 2011, na primeira quinta-feira do mês de fevereiro, haverá um crescimento do pico de consumo de energia, proporcional ao crescimento ocorrido na primeira quita-feira do mês de fevereiro do ano de 2009 ao ano de 2010, é correto afirmar que x é um número compreendido entre
a) 76000 e 77000
b) 77000 e 78000
c) 78000 e 79000
d) 79000 e 80000

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A diferença entre as ordenadas de 2011 e 2010 deve ser igual a diferença entre as ordenadas de 2010 e 2009. Assim, temos: $x - 70654 = 70654 - 61715 \Leftrightarrow x = 79593$.

14) Considere o octógono regular ABCDEFG inscrito numa circunferência λ e de raio R. Se esse mesmo octógono circunscreve uma circunferência α de raio r, então razão entre os quadrados dos comprimentos das circunferências λ e α é, nessa ordem, igual a

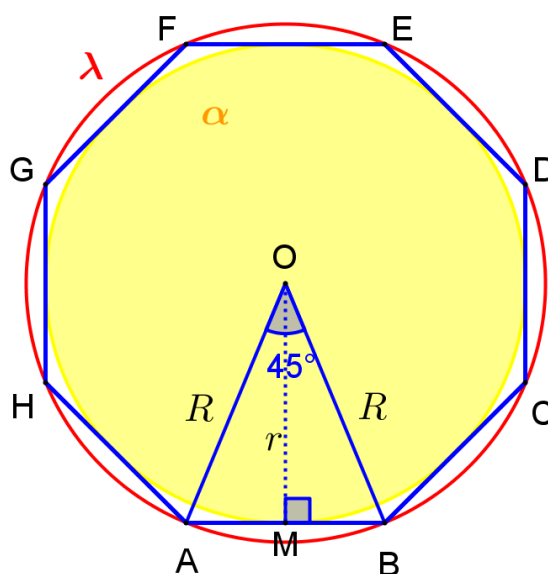
a) $\left(2+\sqrt{2}\right)$

b) $2\left(2+\sqrt{2}\right)$

c) $2\left(2-\sqrt{2}\right)$

d) $2\left(2-\sqrt{2}\right)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OAB, temos:

$$AB^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 45° = 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R^2\left(2-\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow AB = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Vamos calcular a área do triângulo OAB de duas maneiras diferentes para encontrar a razão entre R e r.

$$S_{OAB} = \frac{OA \cdot OB}{2} \operatorname{sen} 45° = \frac{AB \cdot OM}{2} \Leftrightarrow \frac{R \cdot R}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot r \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2-2\sqrt{2}}$$

A razão entre os quadrados dos comprimentos das circunferências λ e α é dada por

$$\left(\frac{C(\lambda)}{C(\alpha)}\right)^2 = \left(\frac{2\pi R}{2\pi r}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \cdot \left(2-\sqrt{2}\right).$$

15) Sabe-se que x, y e z são números naturais distintos e $x > y$. Considere $A = x \cdot y$ e $B = (x \cdot y \cdot z)^2$ e que o $\text{mdc}(A, B)$ e o $\text{mmc}(A, B)$ são, respectivamente, 21 e 1764. Se $W = x^2 + y^2 + z^2$, então o conjunto formado pelos divisores naturais de W possui

a) 4 elementos.
b) 6 elementos.
c) 9 elementos.
d) 12 elementos.

REPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$A = x \cdot y \;\wedge\; B = (x \cdot y \cdot z)^2 = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \Rightarrow A \mid B \Rightarrow \text{mdc}(A, B) = A \;\wedge\; \text{mmc}(A, B) = B$

$\text{mdc}(A, B) = A = x \cdot y = 21$

$\text{mmc}(A, B) = B = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 1764 \Rightarrow 21^2 \cdot z^2 = 1764 \Leftrightarrow z^2 = 4 \Leftrightarrow z = 2$

$A = x \cdot y = 21 \;\wedge\; x > y \Rightarrow (x = 21 \wedge y = 1) \vee (x = 7 \wedge y = 3)$

No primeiro caso, temos $W = 21^2 + 1^2 + 2^2 = 446 = 2 \cdot 223$. Assim, W possui $d(W) = (1+1) \cdot (1+1) = 4$ divisores positivos.

No segundo caso, temos $W = 7^2 + 3^2 + 2^2 = 62 = 2 \cdot 31$. Assim, W possui $d(W) = (1+1) \cdot (1+1) = 4$ divisores positivos.

Assim, o conjunto formado pelos divisores naturais de W sempre possui 4 elementos.

16) Um comerciante vendeu 50% dos $\frac{3}{5}$ de seu estoque de pares de meia com lucro de 30% sobre o custo. Como pretendia renovar o estoque, reduziu o preço de venda e acabou tendo um prejuízo de 10% sobre o custo com a venda dos pares que restam em sua loja. É correto afirmar que, ao final do estoque, esse comerciante teve, sobre o custo, um

a) lucro de 2%
b) lucro de 20%
c) prejuízo de 2%
d) prejuízo de 20%

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Seja $C = 10x$ o preço de custo do estoque inicial.

Se o comerciante vendeu 50% dos $\frac{3}{5}$ do estoque inicial com lucro de 30%. O custo desses produtos é $50\% \cdot \frac{3}{5} \cdot C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 10x = 3x$ e o valor de venda é dado por $V_1 = 3x \cdot (1 + 30\%) = 3x \cdot 1,3 = 3,9x$.

O comerciante vendeu o restante do estoque com prejuízo de 10%. O custo do estoque remanescente é $10x - 3x = 7x$ e o valor de venda é dado por $V_2 = 7x \cdot (1 - 10\%) = 7x \cdot 0,9 = 0,63x$.

Assim, a receita total foi $V_1 + V_2 = 3,9x + 6,3x = 10,2x$.

Portanto, o comerciante teve um lucro de $\frac{10,2x-10x}{10x}=0,02=2\%$ sobre o custo.

17) A "Avenida Euclidiana", retilínea, tem 190 m de comprimento e 0,5 dam de largura em toda a sua extensão. Para asfaltá-la, são necessários 380 kg de asfalto. Pretende-se asfaltar a "Avenida Pitagórica", também retilínea, cuja largura é 100 cm maior que a largura da "Avenida Euclidiana", onde será necessário utilizar 930 kg do mesmo asfalto (mesma espessura). Se o comprimento da "Avenida Pitagórica" é x dm, então, a soma, dos algarismos de x é igual a
a) 22
b) 23
c) 24
d) 25

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, vamos converter todas as medidas para metros. Assim, a Av. Euclidiana tem 190 m de comprimento e $0,5\text{ dam}=5\text{ m}$ de largura.

A largura da Av. Pitagórica é $5\text{ m}+100\text{ cm}=5\text{ m}+1\text{ m}=6\text{ m}$ e seu comprimento é $x\text{ dm}=\frac{x}{10}\text{ m}$.

Se ambas as avenidas são asfaltadas com a mesma espessura, então a razão entre a quantidade de asfalto e a área asfaltada permanece constante. Assim, temos:

$$\frac{380\text{ kg}}{190\text{ m}\cdot 5\text{ m}}=\frac{930\text{ kg}}{\frac{x}{10}\text{ m}\cdot 6\text{ m}}\Leftrightarrow \frac{2}{5}\cdot\frac{x}{10}=155\Leftrightarrow x=3875$$

Portanto, a soma dos algarismos de x é $3+8+7+5=23$.

18) Numa turma de um cursinho, 40% dos alunos são menores de idade. Com o objetivo de que somente metade dessa turma fosse composta por alunos maiores de idade, x% dos alunos maiores de idade foram remanejados para outra turma. Sabendo-se que não houve mais mudança nesse turma, é correto afirmar que x é igual a
a) 20
b) 30
c) $33,\overline{1}$
d) $33,\overline{3}$

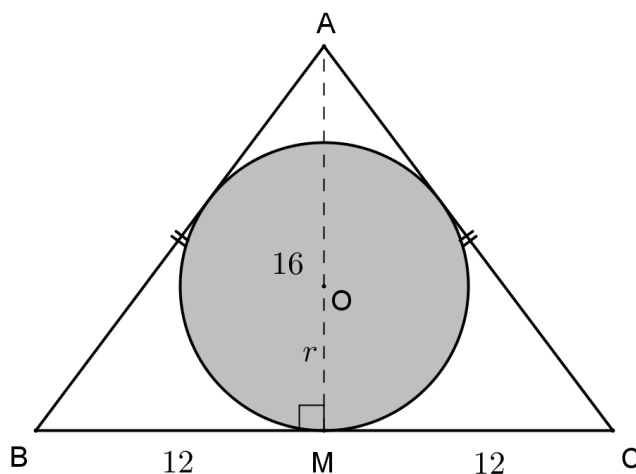
RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Seja n o número de alunos da turma, então $40\%\cdot n=0,4n$ são menores de idade e 0,6n maiores de idade.
Para que metade dos alunos sejam menores de idade, devem ser remanejados 0,2n alunos maiores de idade, ou seja, $x\%=\frac{0,2n}{0,6n}=\frac{1}{3}=33,3\overline{3}\%$.

19) A figura representa o logotipo que será estampado em 450 camisetas de uma Olimpíada de Matemática realizada entre os alunos do "Colégio Alfa". Essa figura é formada por um círculo de centro O inscrito num triângulo isósceles cuja base $\overline{BC}$ mede 24 cm e altura relativa a esse lado mede 16 cm. O círculo será pintado com tinta cinza e sabe-se que é necessário, exatamente, 1 pote de tinta cinza para pintar 5400 cm^2

Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de potes necessários para pintar o círculo em todas as camisetas é igual a (adote $\pi = 3$)
a) 9
b) 10
c) 11
d) 12

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AMB, temos: $\overline{AB}^2 = 12^2 + 16^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 20$
$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} = 20$
$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 20 + 20 + 24 = 64 \Leftrightarrow p_{ABC} = 32$

$S_{ABC} = p \cdot r = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AM}}{2} \Leftrightarrow 32 \cdot r = \frac{24 \cdot 16}{2} \Leftrightarrow r = 6$

A área de cada círculo é $S_{circ} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 3 \cdot 36 = 108$.

A área total a ser pintada é $450 \cdot 108 \text{ cm}^2$ e o número de potes de tinta necessários é $\frac{450 \cdot 108}{5400} = 9$.

20) Para as eleições para a Presidência da República do Brasil foi feita uma pesquisa com 2400 pessoas sobre suas preferências em relação aos candidatos A, B e C. Sabe-se que cada pessoa optou por um único candidato, ou votou em branco, ou votou nulo, e que o diagrama abaixo indica os resultados da pesquisa.

Sabe-se que a diferença entre o número de pessoas que votou nulo e o número de pessoas que votou em B é y. Então, y representa a/o

a) quarta parte do total de entrevistados.
b) metade do total de entrevistados.
c) terça parte do total de entrevistados.
d) dobro do número de pessoas que votou em C.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} a + b = 90° \\ a = 2b \end{cases} \Rightarrow 2b + b = 90° \Leftrightarrow b = 30° \wedge a = 60°$

$2a + b + c + d = 360° \Rightarrow 2 \cdot 60° + 30° + 90° + d = 360° \Leftrightarrow d = 120°$

O número de pessoas que votou nulo (V) é dado por $\frac{d}{360°} \cdot 2400 = \frac{120°}{360°} \cdot 2400 = 800$.

O número de pessoas que votou em B (II) é dado por $\frac{b}{360°} \cdot 2400 = \frac{30°}{360°} \cdot 2400 = 200$.
Portanto, $y = 800 - 200 = 600$ que é a quarta parte do total de entrevistados (2400).

21) Sabendo que $y = (2010)^2 \cdot 2000 - 2000 \cdot (1990)^2$, o valor de $\frac{y}{10^7}$ é igual a

a) 8
b) 16
c) 20
d) 32

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$y = (2010)^2 \cdot 2000 - 2000 \cdot (1990)^2 = 2000 \cdot \left(2010^2 - 1990^2\right) = 2000 \cdot (2010 + 1990) \cdot (2010 - 1990) =$$
$$= 2000 \cdot 4000 \cdot 20 = 16 \cdot 10^7$$
$$\Rightarrow \frac{y}{10^7} = 16$$

22) Simplificando-se a expressão $S = \frac{\left(x^{-2}\right)^{2^{2^2}} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{3^{2^2}}\right]^{-1}}{x^{2^3} \cdot \left[\left(-x^3\right)^{3^2}\right]^{2^3}}$, onde $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$, obtém-se

a) $-x^{-94}$
b) x^{94}
c) x^{-94}
d) $-x^{94}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$S = \frac{\left(x^{-2}\right)^{2^{2^2}} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{3^{2^2}}\right]^{-1}}{x^{2^3} \cdot \left[\left(-x^3\right)^{3^2}\right]^{2^3}} = \frac{\left(x^{-2}\right)^{2^4} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{3^4}\right]^{-1}}{x^8 \cdot \left[\left(-x^3\right)^9\right]^8} = \frac{\left(x^{-2}\right)^{16} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{81}\right]^{-1}}{x^8 \cdot \left[-x^{27}\right]^8} =$$
$$= \frac{x^{-32} \cdot \left[-x^{-162}\right]^{-1}}{x^8 \cdot x^{216}} = \frac{x^{-32} \cdot \left(-x^{162}\right)}{x^{224}} = -x^{-94}$$

23) O quarteto de alunos da corrida de revezamento do CPCAR tem como "escudo" o desenho esquematizado na construção com régua e compasso abaixo.

Sabe-se que a abertura do compasso no esquema é de 5 cm, o centro da circunferência é O, o ângulo $C\hat{A}R$ mede $60°$ e os ângulos $C\hat{O}P$, $C\hat{O}R$, $P\hat{O}A$ e $R\hat{O}A$ são congruentes.

Sendo $E = x + \overline{PO} + \overline{OR} + \overline{RA} + \overline{OA} + \overline{OC} + y + z$, o valor de E, em cm, é dado por

a) $15\left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

b) $5\left(11 + \sqrt{2}\right)$

c) $5\left(11 + \sqrt{3}\right)$

d) $5\left(9 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Os ângulos $C\hat{O}P$, $C\hat{O}R$, $P\hat{O}A$ e $R\hat{O}A$ são congruentes, então $RP \perp AC$.

A abertura do compasso é igual ao raio r da circunferência, então $r = OC = 5$.

Os segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OR}$ também são raios da circunferência, então $OP = OR = 5$.

No triângulo retângulo AOR, temos:

$$\text{tg}60° = \frac{OR}{OA} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{5}{OA} \Leftrightarrow OA = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen}\,60° = \frac{OR}{AR} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{AR} \Leftrightarrow AR = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Vamos agora calcular o comprimento dos três arcos de circunferência x, y e z.

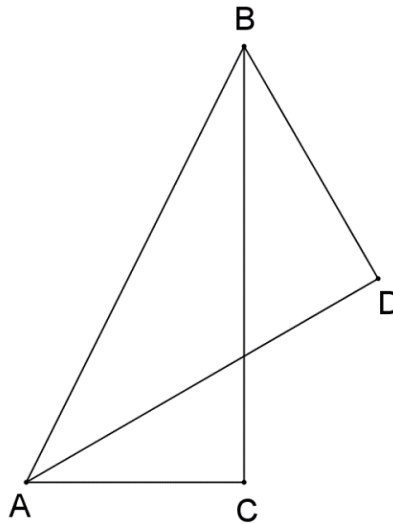
$$x = y = \frac{90°}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 7,5$$

$$z = x + y = 7,5 + 7,5 = 15$$

Assim, temos:

$$E = x + \overline{PO} + \overline{OR} + \overline{RA} + \overline{OA} + \overline{OC} + y + z = 7,5 + 5 + 5 + \frac{10\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 5 + 7,5 + 15 =$$

$$= 45 + 5\sqrt{3} = 15\left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

24) Em relação à figura abaixo, tem-se $C\hat{A}D = 30°$, $\overline{AC} = 2\text{cm}$ e $\overline{BC} = 4\text{cm}$.

Se $AC \perp CB$ e $AD \perp DB$ então, $\overline{BD}$, em cm, é igual a

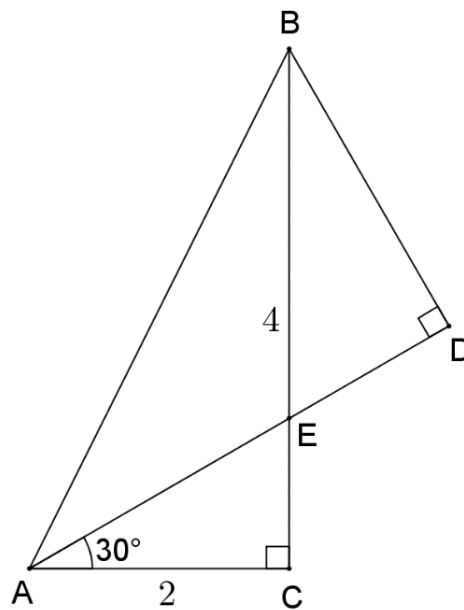
a) $\frac{6-\sqrt{3}}{3}$

b) $6\sqrt{3}-3$

c) $2\sqrt{3}-1$

d) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

No triângulo retângulo $\operatorname{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{CE}}{2} \Leftrightarrow \overline{CE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{BE} = \overline{BC} - \overline{CE} = 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$C\hat{A}D = 30° \Rightarrow A\hat{E}C = 60° = B\hat{E}D$

No triângulo retângulo BED, temos: $\operatorname{sen}60° = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{BE} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - 1$

.

PROVA DE MATEMÁTICA – EPCAr – 2009/2010

1) Considere os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ e analise as proposições abaixo, classificando-as em (V) verdadeiras ou (F) falsas.

( ) Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 6n+3, n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$, então $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$.

( ) Se $P = \mathbb{R} \cap \mathbb{N}$, $T = (\mathbb{N}^* \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$ e $S = \mathbb{N}^* \cup (\mathbb{Z}_+^* \cap \mathbb{Q})$, então $P \cap T \cap S = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}_-$.

( ) Se $y = \sqrt[n]{\dfrac{600}{25^{n+2} - 5^{2n+2}}}$ para $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, então y é irracional.

Marque a alternativa que apresenta a sequência correta.

a) V – V – F
b) F – F – V
c) V – F – F
d) F – V – V
e) F – F – F

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
(I) V
$x \in B \Leftrightarrow$ x é múltiplo de 3.
$x \in A \Rightarrow x = 6n+3 \Rightarrow$ x é múltiplo de 3 $\Rightarrow A \subset B$
Logo, $A \cup B = B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 3\}$
(II) V
$$P \cap T \cap S = (\mathbb{R} \cap \mathbb{N}) \cap [(\mathbb{N}^* \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}] \cap [\mathbb{N}^* \cup (\mathbb{Z}_+^* \cap \mathbb{Q})] = \mathbb{N} \cap (\mathbb{N}^* \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{N}^* \cup \mathbb{Z}_+^*) =$$
$$= \mathbb{N} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^* = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}_-$$
(III) F
$$y = \sqrt[n]{\frac{600}{25^{n+2} - 5^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\frac{600}{5^{2n+4} - 5^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\frac{600}{5^{2n+2}(5^2-1)}} = \sqrt[n]{\frac{25}{5^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{5^{2n}}} = \frac{1}{25} \in \mathbb{Q}$$

2) Um número x de três algarismos, tal que $\sqrt{x} < 14$, tem o produto de seus algarismos igual a 24; se permutarmos os dois últimos algarismos de x, o número y assim obtido excede x de 18 unidades. Com base nos dados acima, é correto afirmar que

a) o máximo divisor comum de y e x NÃO é um número primo.
b) a razão $r = \dfrac{x}{y}$ é tal que $r > \dfrac{37}{41}$.
c) y tem 2 divisores a mais que x.
d) a soma dos algarismos de x com os algarismos de y é menor que 20.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja o número de três algarismos $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, onde $a \cdot b \cdot c = 24$.
O número y obtido permutando-se os dois últimos algarismos de x é $y = \overline{acb} = 100a + 10c + b$.

$$y - x = 18 \Leftrightarrow (100a + 10c + b) - (100a + 10b + c) = 18 \Leftrightarrow 9(c - b) = 18 \Leftrightarrow c - b = 2$$

$$\sqrt{x} < 14 \Rightarrow x < 196 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b \cdot c = 24 \Rightarrow b \cdot (b + 2) = 24 \Leftrightarrow b = 4 \text{ ou } b = -6 \text{ (não convém)}$$

$$\Rightarrow x = 146 \text{ e } y = 164$$

a) INCORRETA

$$\left.\begin{array}{l} y = 164 = 2^2 \cdot 41 \\ x = 146 = 2 \cdot 73 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mdc}(y, x) = \text{mdc}(164,146) = 2$$

b) INCORRETA

$$r = \frac{x}{y} = \frac{146}{164} = \frac{73}{82} < \frac{37}{41} = \frac{74}{82}$$

c) CORRETA

$$\left.\begin{array}{l} D(y) = D(2^2 \cdot 41) = 3 \cdot 2 = 6 \\ D(x) = D(2 \cdot 63) = 2 \cdot 2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow D(y) - D(x) = 2$$

d) INCORRETA

$$(1 + 4 + 6) + (1 + 6 + 4) = 22 > 20$$

3) João pagou a metade dos $\frac{3}{5}$ do que devia. Ao procurar o credor para quitar o restante de sua dívida, foram-lhe apresentadas duas propostas:
1ª) Pagar tudo à vista com 10% de desconto.
2ª) Assumir um acréscimo de 30% para um possível pagamento parcelado.
João optou pelo pagamento à vista e gastou exatamente 945 reais para quitar o restante da dívida. Caso optasse pela 2ª proposta, João teria gasto a mais um valor em reais compreendido entre
a) 390 e 410
b) 410 e 430
c) 430 e 450
d) 450 e 470

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Seja x o valor original da dívida de João.
João pagou $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot x = \frac{3}{10} x$, então restaram $x - \frac{3}{10} x = \frac{7}{10} x$ a pagar.
João gastou 945 reais para quitar sua dívida à vista com 10% de desconto (1ª proposta), então

$$(1 - 10\%) \cdot \frac{7}{10} x = 945 \Leftrightarrow \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10} x = 945 \Leftrightarrow x = 1500.$$

Se João houvesse feito o pagamento parcelado (2ª proposta), ele teria que pagar $(1+30\%)\cdot\frac{7}{10}x=\frac{13}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot1500=1365$, o que representa um acréscimo de $1365-945=420$ reais em relação à opção de pagamento à vista.

4) Nos preparativos da festa de 60 anos da EPCAR, um grupo A composto de 6 soldados, trabalhando 6 horas por dia, contava com o prazo de 7 dias para aparar a grama dos jardins, utilizando todos os componentes o mesmo tipo de equipamento. Já que outros setores da Escola necessitavam também de reparos, ao final do 5° dia, quando apenas 75% do gramado estava cortado, alguns soldados foram remanejados e um novo grupo B se formou. Esse grupo B, cuja quantidade de soldados correspondia a $\frac{1}{3}$ do grupo A, dispôs-se a acabar de aparar a grama dos jardins, aumentando a carga horária diária em $33\frac{1}{3}\%$ e utilizando equipamentos cuja produtividade era o triplo dos equipamentos utilizados pelo grupo A. Supondo que todos os equipamentos tiveram perfeito funcionamento aproveitando sua capacidade máxima, é correto afirmar que o grupo B concluiu a tarefa
a) após o prazo previsto de sete dias.
b) em dez horas de trabalho.
c) em oito horas de trabalho.
d) um dia antes do prazo previsto.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta)**
Em cinco dias, o grupo A executa $6\cdot6\cdot5\cdot1=180$ homens-hora de trabalho; logo, para completar os 25% restantes do gramado, são necessárias mais 60 homens-hora de trabalho.
O grupo B realiza $2\cdot8\cdot3=48$ homens-hora de trabalho por dia; assim, são necessários mais $\frac{60}{48}=1\frac{1}{4}$ dias. Como cada dia possui 8 horas de trabalho, são necessárias mais $\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot8=\frac{5}{4}\cdot8=10$ horas de trabalho.

5) Pedro colocou um terreno a venda visando um lucro de 20% sobre o preço de custo. Tendo em vista que a crise financeira atual dificultou a transação, ele resolveu fazer a venda em duas etapas:
1ª etapa: Vendeu $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3}$ do terreno reduzindo a taxa de lucro à metade e recebeu R$ 44.000,00 pelo negócio.
2ª etapa: Vendeu o restante do terreno e conseguiu o lucro de 20% sobre o custo desta parte.
Analisando os fatos acima, concluiu-se que Pedro
a) havia pago pelo terreno todo menos de R$ 90.000,00.
b) recebeu, no total, menos de R$ 110.000,00.
c) teve uma redução de 5 mil reais no lucro total pretendido.
d) teve um lucro real de 16% sobre o preço de custo.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Pedro vendeu $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$ do terreno com lucro de $\frac{20\%}{2}=10\%$ do preço de custo (PC) por R$ 44.000,00.
Assim, temos: $\left(\frac{2}{5}\cdot \text{PC}\right)\cdot(1+10\%)=44.000 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\cdot 1{,}1\cdot \text{PC}=44.000 \Leftrightarrow \text{PC}=100.000$.
O lucro nessa transação foi $44.000-\frac{2}{5}\cdot 100.000=4.000$.
Pedro vendeu o restante do terreno cujo custo era $\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdot \text{PC}=\frac{3}{5}\cdot 100.000=60.000$ com lucro de 20% sobre o custo, então o valor dessa venda foi $60.000\cdot(1+20\%)=72.000$.
O lucro nessa segunda transação foi $72.000-60.000=12.000$.
a) INCORRETA
Pedro pagou pelo terreno R$ 100.000,00, ou seja, mais do que R$ 90.000,00.
b) INCORRETA
Pedro recebeu no total $44.000+72.000=116.000$ reais, ou seja, mais do que R$ 110.000,00.
c) INCORRETA
O lucro total foi $4.000+12.000=16.000$. O lucro total pretendido era $20\%\cdot 100.000=20.000$. Portanto, houve uma redução de $20.000-16.000=4.000$ reais.
d) CORRETA
O lucro total foi R$ 16.000,00 que corresponde a 16% do preço de custo (R$ 100.000,00).

6) Um estudante, preparando-se para o Exame de Admissão ao CPCAR, resolveu todas as N questões de uma prova. Ele acertou 8 das 18 primeiras e acertou $\frac{5}{6}$ das restantes. Sabe-se que o estudante acertou 75% do total de questões da prova. A quantidade de questões que ele errou nessa prova é um número compreendido entre
a) 5 e 10
b) 10 e 15
c) 15 e 20
d) 20 e 25

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
O número de questões acertadas pelo aluno foi $8+\frac{5}{6}\cdot(\text{N}-18)=\frac{75}{100}\cdot \text{N} \Leftrightarrow \text{N}=84$.
Portanto, ele errou $\frac{25}{100}\cdot 84=21$ questões.

7) Analise as expressões abaixo.
$$A=\sqrt[3]{\frac{(0{,}005)^2\cdot(0{,}000075)}{10}}$$

$B=-\left[\frac{(5\cdot10^{-4}).(2^{-1/3})}{3^{-1/3}}\right]$

Marque a resposta correta.

a) $A+B>0$

b) $A\cdot B=-1$

c) $\frac{A}{B}=-1$

d) $A^{-1}=B$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$A=\sqrt[3]{\frac{(0,005)^2\cdot(0,000075)}{10}}=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{5}{10^3}\right)^2\cdot\left(\frac{75}{10^6}\right)}{10}}=\sqrt[3]{\left(\frac{5^2}{10^6}\right)\cdot\left(\frac{3\cdot5^2}{10^6}\right)\cdot\frac{1}{10}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot5^4}{10^9\cdot10^4}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{3}{10^9\cdot2^4}}=2^{-\frac{4}{3}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot10^{-3}$$

$$B=-\left[\frac{(5\cdot10^{-4}).(2^{-1/3})}{3^{-1/3}}\right]=-2^{-\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot5\cdot10^{-1}\cdot10^{-3}=-2^{-\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot5\cdot\left(2^{-1}\cdot5^{-1}\right)\cdot10^{-3}=-2^{-\frac{4}{3}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot10^{-3}$$

a) INCORRETA: $A+B=0$

b) INCORRETA: $A\cdot B=-2^{-\frac{8}{3}}\cdot3^{\frac{2}{3}}\cdot10^{-6}\neq-1$

c) CORRETA: $A=-B\Leftrightarrow\frac{A}{B}=-1$

d) INCORRETA: $A=-B$

8) A figura plana abaixo representa o logotipo de uma empresa. Ele foi projetado a partir de um triângulo equilátero central, cujo perímetro mede 0,30 m. Expandiu-se o desenho, acoplando em cada lado desse triângulo um quadrado. Para fechar a figura, foram traçados 3 segmentos retilíneos, completando assim o logotipo.

Nos preparativos para a Copa do Mundo de 2010, esse logotipo será pintado com tintas de mesma qualidade e textura, a saber:

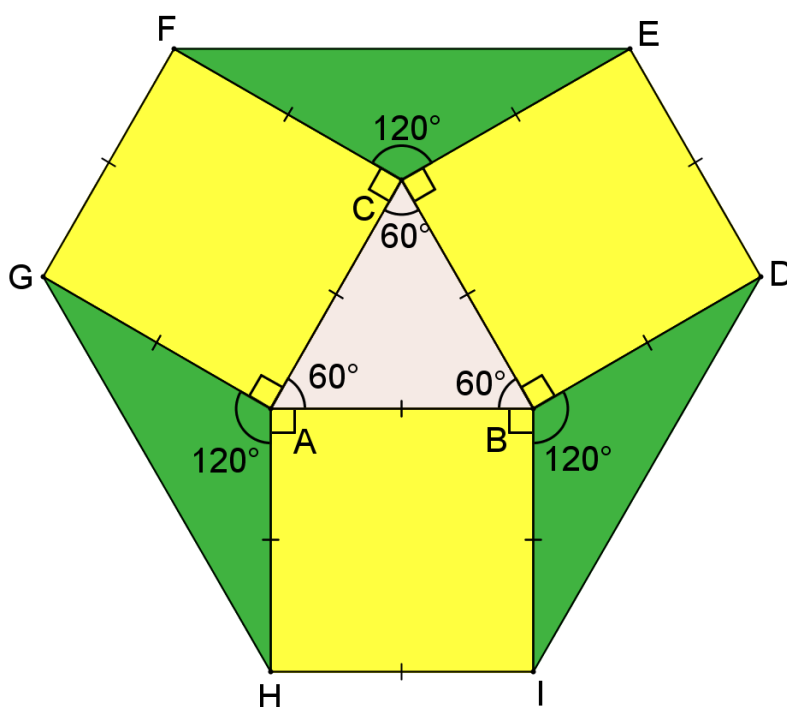
- o triângulo central, na cor branca;
- os demais triângulos, na cor verde;

- os quadrados, na cor amarela.

Sabe-se que cada figura será pintada apenas uma vez e que cada mililitro de tinta cobre 1 cm^2 de área. Considere $\sqrt{3}=1,74$ e marque a alternativa correta.

a) O consumo total de tinta será de mais de meio litro.
b) As áreas branca e verde juntas equivalem a 58% da área amarela.
c) O consumo de tinta amarela será o dobro do consumo de tinta verde.
d) A área branca corresponde a 30% da área verde.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Se o comprimento (perímetro) do triângulo equilátero ABC é 0,30 m, então o seu lado é $\frac{0,30}{3}=0,1\text{ m}=10\text{ cm}$.

$S_{\text{branca}}=\frac{10^2\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

$S_{\text{verde}}=3\cdot\frac{10\cdot 10}{2}\text{sen}120°=150\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=75\sqrt{3}\text{ cm}^2$

$S_{\text{amarela}}=3\cdot 10^2=300\text{ cm}^2$

a) ERRADA

A área total é $S_{\text{total}}=S_{\text{branca}}+S_{\text{verde}}+S_{\text{amarela}}=25\sqrt{3}+75\sqrt{3}+300=100\left(3+\sqrt{3}\right)\text{ cm}^2$.

Portanto, foram gastos $100\left(3+\sqrt{3}\right)\text{ m}\ell<100\cdot 4,74=474\text{ m}\ell$, ou seja, menos de meio litro.

b) CORRETA

$$\frac{S_{branca}+S_{verde}}{S_{amarela}}=\frac{\frac{10^2\sqrt{3}}{4}+\frac{10\cdot 10\cdot \text{sen}(120°)\cdot 3}{2}}{3\cdot 10^2}=\frac{25\sqrt{3}+150\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{300}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 58\%$$

c) ERRADA

A razão entre o consumo de tinta amarela e o consumo de tinta verde é igual à razão entre a área amarela e a área verde, ou seja, $\frac{S_{amarela}}{S_{verde}}=\frac{300}{75\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\neq 2$.

d) ERRADA

$$\frac{S_{branca}}{S_{verde}}=\frac{25\sqrt{3}}{75\sqrt{3}}=\frac{1}{3}=33,\bar{3}\%\neq 30\%$$

9) Um pintor foi contratado para pintar a fachada do prédio do Comando da EPCAR, em decorrência das comemorações do seu sexagésimo aniversário.
Esse pintor cobra um valor fixo de 30 reais e mais uma quantia proporcional à área pintada.
A tabela seguinte indica o orçamento apresentado pelo pintor.

Área **x** pintada (em m²)	Total **y** a pagar pela pintura (em reais) incluindo a parcela fixa
5	40
10	50
15	60
20	70
30	90
40	110

Com base nos dados acima, classifique em (V) verdadeiro ou (F) falso cada item abaixo.
( ) O pintor cobra 30 reais mais 3 reais pelo metro quadrado pintado.
( ) Se foram pagos pela pintura 530 reais, então a área pintada foi de 250 m^2.
( ) Pela pintura de uma área correspondente a 150 m^2 seria cobrado menos de 300 reais.
Tem-se a sequência correta em
a) V – F – F
b) V – F – V
c) F – V – F
d) F – F – V

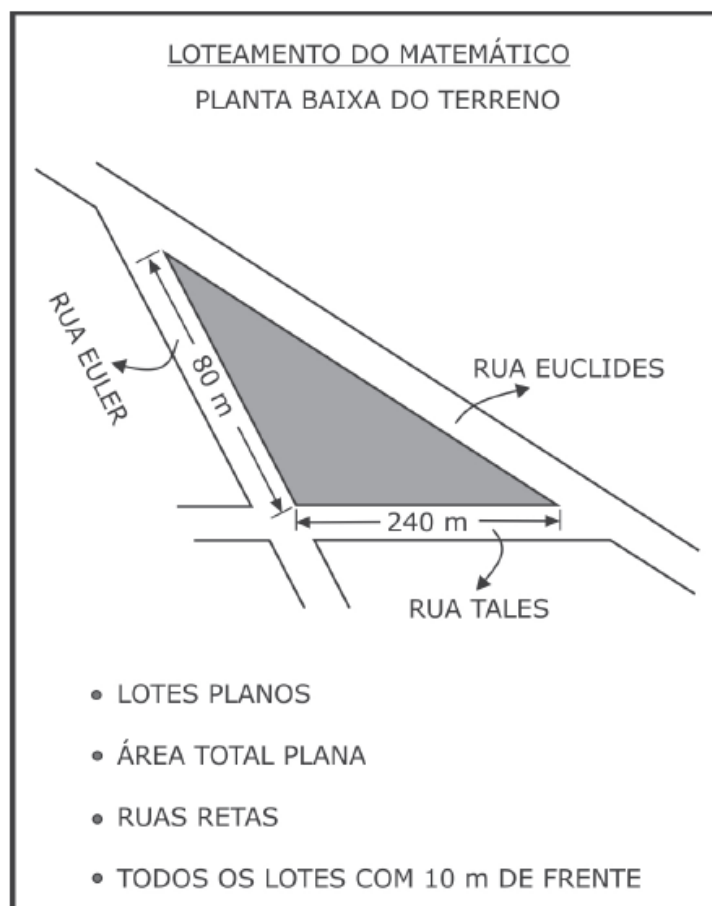
RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**
Como o valor cobrado pelo pinto é composto de um valor fixo de 30 reais mais uma parte proporcional à área pintada x, então o valor cobrado pode ser escrito na forma $y=30+a\cdot x$.
Vamos usar um dos valores dados para identificar o valor de a:
$x=5;\ y=40\Rightarrow 40=30+a\cdot 5\Leftrightarrow a=2$
Portanto, o valor cobrado é $y=30+2x$.
Vamos agora analisar cada um dos itens:

(F) O pintor cobra 30 reais mais 2 reais pelo metro quadrado pintado.

(V) $530 = 30 + 2x \Leftrightarrow x = 250\text{ m}^2$

(F) $y = 30 + 2 \cdot 150 = 330 > 300$

10) Uma empresa imobiliária colocou num outdoor de uma cidade do interior de Minas Gerais o anúncio como reproduzido abaixo.

Considerando que o terreno loteado é em forma de triângulo, como no desenho acima, onde as ruas Tales e Euler cruzam-se sob ângulo obtuso, é correto afirmar que os números MÍNIMO e MÁXIMO de lotes do Loteamento do Matemático são, respectivamente, iguais a

a) 56 e 63
b) 57 e 64
c) 57 e 63
d) 48 e 64

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Como os lotes têm 10 m de frente, há $\left\lfloor \frac{80}{10} \right\rfloor = 8$ lotes com frente para a Rua Tales e $\left\lfloor \frac{240}{10} \right\rfloor = 24$ lotes com frente para a Rua Euler.

O número mínimo e máximo de lotes está associado ao tamanho mínimo (m) e máximo (M) da Rua Euclides, respectivamente.
O tamanho mínimo é determinado pela condição do ângulo entre as ruas Euler e Tales ser obtuso.
Pela síntese de Clairaut, temos: $m^2 > 80^2 + 240^2 = 64000 \Leftrightarrow m > 80\sqrt{10} \approx 253$.
Logo, o número mínimo de lotes com frente para a Rua Euclides é $\left\lfloor \frac{253}{10} \right\rfloor = 25$.
O tamanho máximo da Rua Euclides é determinado pela desigualdade triangular. Assim, temos: $M < 80 + 240 = 320$. Assim, o número máximo de lotes com frente para a Rua Euclides é $\left\lfloor \frac{320}{10} \right\rfloor - 1 = 31$. Note que subtraímos uma unidade, pois a Rua Euclides não pode medir 320 m.
Portanto, o número mínimo de lotes é $8 + 24 + 25 = 57$ e o número máximo $8 + 24 + 31 = 63$.

11) Considere os números a, b e x tais que $a + b = x$, $a - b = x^{-1}$ e $a \neq b \neq 0$. O valor da expressão

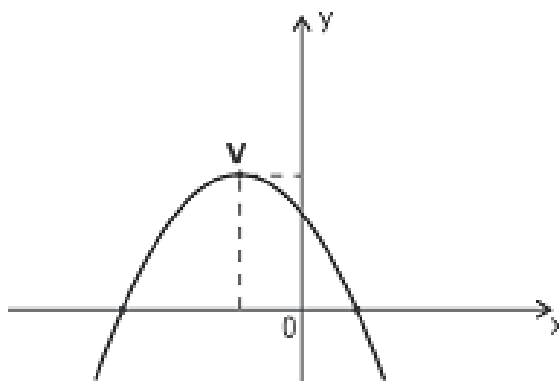
$$y = \frac{\dfrac{(a^2 + 2ab + b^2)(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)}}{\left(\dfrac{a^2 - ab}{2a}\right)}$$ é

a) 2
b) $2x^2$
c) x^2
d) $\frac{x^2}{2}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$y = \frac{\dfrac{(a^2 + 2ab + b^2)(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)}}{\left(\dfrac{a^2 - ab}{2a}\right)} = \frac{(a+b)^2(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{2a}{a(a-b)} = \frac{2(a+b)}{(a-b)} = \frac{2x}{x^{-1}} = 2x^2$$

12) Seja f a função real definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e V, o vértice da parábola representada graficamente por

Após a análise gráfica, assinale a alternativa INCORRETA.

a) $a \cdot b \cdot c^2 < 0$

b) $\frac{ab^2}{c} < 0$

c) $a^2 + bc > 0$

d) $bc - a < 0$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Como a concavidade da parábola é voltada para baixo, então $a < 0$.

$x_v = \frac{-(-b)}{2a} = \frac{b}{2a} < 0$

Como $a < 0$, conclui-se que $b > 0$.
Como f corta o eixo y no semieixo positivo, então $c > 0$.
Logo $b \cdot c > 0$ e $-a > 0$, então $bc - a > 0$.

13) A média aritmética das raízes da equação $\sqrt{a+x} = \sqrt{a} + \sqrt{a-x}$, na incógnita x, $a \in \mathbb{Q}_+^*$ é um número

a) irracional positivo.
b) primo ímpar.
c) múltiplo de 12.
d) divisor par de 30.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**

$\sqrt{a+x}=\sqrt{a}+\sqrt{a-x} \Leftrightarrow \sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$

$\Leftrightarrow a+\not{x}+\not{a}-\not{x}-2\sqrt{a^2-x^2}=\not{a} \;\wedge\; a+x>a-x\geq 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-x^2}=a \;\wedge\; a\geq x>0$

$\Leftrightarrow 4a^2-4x^2=a^2 \;\wedge\; a\geq x>0$

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{3a^2}{4} \;\wedge\; a\geq x>0$

$\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \;\wedge\; a\geq x>0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Logo, a média aritmética das raízes é $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ que é um irracional positivo.

14) Se as 156 camas de um dormitório forem distribuídas em x fileiras horizontais iguais, contendo y camas cada, sobrarão 6 camas. Se as mesmas 156 camas forem distribuídas em $(x+5)$ fileiras horizontais iguais, contendo $(y-1)$ camas cada, ainda continuarão sobrando 6 camas. Então, $(x+y)$ é igual a
a) 31
b) 30
c) 29
d) 28

RESPOSTA: a

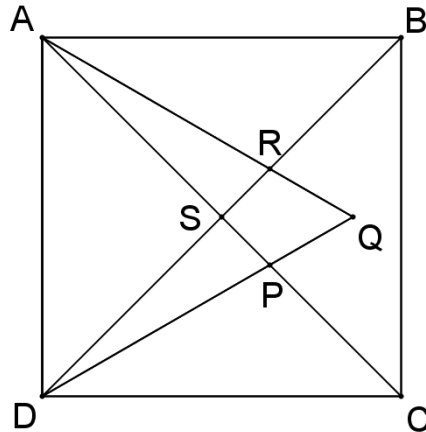
RESOLUÇÃO:

$\begin{cases}156=xy+6\\156=(x+5)(y-1)+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=150\\xy-x+5y=155\end{cases}$

$\Leftrightarrow 150-x+5y=155 \Leftrightarrow x=5y-5$

$(5y-5)\cdot y=150 \Leftrightarrow y^2-y-30=0 \Leftrightarrow y=-5\text{ (não convém)} \vee\; y=6$

$\Rightarrow y=6 \;\wedge\; x=5\cdot 6-5=25 \Rightarrow x+y=25+6=31$

15) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e ADQ é um triângulo equilátero.

Os pontos D, S, R e B estão alinhados, assim como A, S, P e C. Se $\overline{RB} \equiv \overline{QB} \equiv \overline{PC} \equiv \overline{QC}$, então é INCORRETO afirmar que

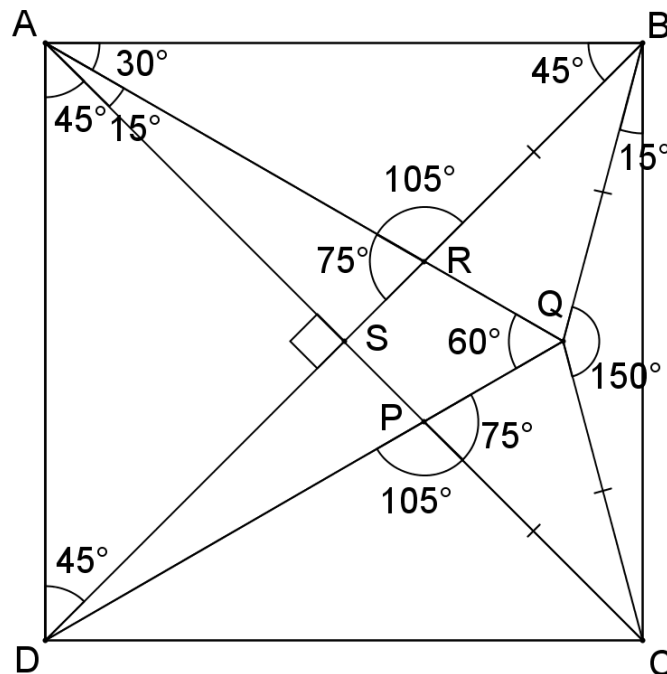
a) nos triângulos CBQ e SAR tem-se $S\hat{A}R \neq C\hat{B}Q$.

b) nos triângulos BQD, ARB e AQD tem-se $B\hat{Q}D + A\hat{R}B = 4\left(A\hat{Q}D\right)$.

c) a soma dos ângulos $D\hat{P}C$ e $A\hat{S}D$ dos triângulos DPC e ASD é maior do que o ângulo $B\hat{Q}C$ do triângulo BQC.

d) nos triângulos SAR e PCQ tem-se $S\hat{R}A - C\hat{P}Q = 0$.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Lembrando que os ângulos internos do quadrado são retos e os do triângulo equilátero medem $60°$.

$S\hat{A}R = D\hat{A}Q - D\hat{A}S = 60° - 45° = 15°$

$B\hat{R}Q = B\hat{A}R + A\hat{B}R = 30° + 45° = 75°$

$\overline{RB} \equiv \overline{QB} \Rightarrow B\hat{Q}R = B\hat{R}Q = 75° \Rightarrow R\hat{B}Q = 180° - 2 \cdot 75° = 30°$

$C\hat{B}Q = C\hat{B}A - R\hat{B}Q - A\hat{B}D = 90° - 30° - 45° = 15°$

$B\hat{Q}D = B\hat{Q}R + A\hat{Q}D = 75° + 60° = 135°$

$A\hat{R}B = 180° - B\hat{R}Q = 180° - 75° = 105°$

$D\hat{P}C = A\hat{R}B = 105°$

$A\hat{S}D = 90°$

$\overline{QB} \equiv \overline{QC} \Rightarrow Q\hat{B}C = Q\hat{C}B = 15° \Rightarrow B\hat{Q}C = 180° - 2 \cdot 15° = 150°$

$S\hat{R}A = B\hat{R}Q = 75°$

$C\hat{P}Q = B\hat{R}Q = 75°$

a) INCORRETO: $S\hat{A}R = C\hat{B}Q = 15°$

b) CORRETO: $B\hat{Q}D + A\hat{R}B = 135° + 105° = 240° = 4 \cdot 60° = 4\left(A\hat{Q}D\right)$

c) CORRETO: $D\hat{P}C + A\hat{S}D = 105° + 90° = 205° > 150° = B\hat{Q}C$

d) CORRETO: $S\hat{R}A = C\hat{P}Q = 75°$

Note que é dado no enunciado que $\overline{RB} \equiv \overline{QB} \equiv \overline{PC} \equiv \overline{QC}$, mas é possível fazer a questão sem esse dado. Basta observar que $\overline{AB} \equiv \overline{AQ}$, o que implica $A\hat{Q}B = A\hat{B}Q = 75°$, $R\hat{B}Q = 75° - 45° = 30°$ e $B\hat{R}Q = 180° - 75° - 30° = 75°$. Daí conclui-se que $\overline{RB} \equiv \overline{QB}$.

16) A Revista Época publicou uma reportagem de março de 2009 sobre as possíveis mudanças na Caderneta de Poupança no Brasil.
"... Antigo patinho feio das aplicações financeiras, a boa e vela Caderneta de Poupança voltou a despertar os olhares dos investidores ávidos por fazer o dinheiro render sem correr riscos."
O gráfico abaixo mostra o rendimento anual de dois fundos de aplicação, CDI e Caderneta de Poupança, diariamente no período entre 1º de janeiro de 2006 e 31 de dezembro de 2008 (cada ano na abscissa indica o final do ano anterior e o início daquele ano). Por exemplo, em 1º de janeiro de 2006, o rendimento anual da Caderneta de Poupança era 8,32% e o rendimento anual do CDI era 10,83%.

Analise o gráfico acima e classifique as proposições que seguem em (V) verdadeiras ou (F) falsas.
( ) Durante o ano de 2008, a Caderneta de Poupança teve rendimento percentual constante.
( ) A aplicação no CDI foi sempre mais vantajosa em qualquer período entre janeiro de 2006 e dezembro de 2008.
( ) No primeiro semestre de 2008, houve um momento em que era indiferente aplicar no CDI ou na Caderneta de Poupança.
Tem-se a sequência correta em
a) V – V – F
b) V – F – V
c) V – F – F
d) F – V – F

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**
(V) Durante o ano de 2008, a Caderneta de Poupança teve rendimento percentual constante.
Basta observar a reta paralela ao eixo das abscissas de 2008 a 2009.
(F) A aplicação no CDI foi sempre mais vantajosa em qualquer período entre janeiro de 2006 e dezembro de 2008.

Em algum momento durante o ano de 2008, torna-se mais vantajoso aplicar na Caderneta de Poupança.
(V) No primeiro semestre de 2008, houve um momento em que era indiferente aplicar no CDI ou na Caderneta de Poupança.
Vamos identificar a abscissa da interseção dos dois gráficos.

CDI: $\frac{y-6,60}{x-2009}=\frac{6,60-8,70}{2009-2008} \Leftrightarrow y=-2,1x+4225,5$

$y=-2,1x+4225,5=7,86 \Leftrightarrow x=2008,4$

Logo, a interseção dos gráficos ocorre antes da metade do ano de 2008.

17) Durante as comemorações dos 60 anos da EPCAR, em virtude do louvável destaque que os alunos do CPCAR alcançaram em 2008 nas Olimpíadas de Matemática, serão produzidas placas para premiação dos melhores classificados.
Tais placas deverão conter o emblema abaixo cujas figuras geométricas (circunferência e triângulos) terão seu contorno coberto por um fio de ouro de espessura uniforme.

Dados:

$AB=180^\circ; \overline{AO}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=12\text{ cm}; \overline{AC}=\overline{AD}; C\hat{O}D=120^\circ; \pi=3; \sqrt{3}=1,7$

Sabendo que 10 g de ouro custam R$ 450, 00 e produzem 10 cm desse fio, pode-se estimar que o valor, em reais, gasto com o ouro para a confecção de uma medalha estará entre os números

a) 7500 e 8000
b) 8000 e 8500
c) 8500 e 9000
d) 9000 e 9500

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO: **(O enunciado dessa questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi originalmente proposta.)**

Como $\overline{AO}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=12\text{ cm}$, o ponto O é o centro da circunferência da figura.

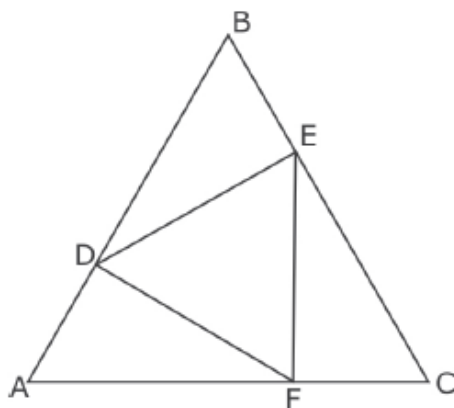
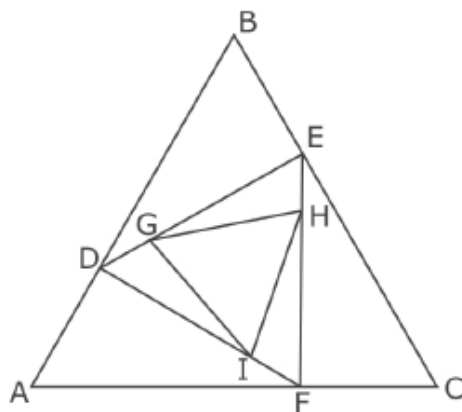
As cordas AD e AC são lados do hexágono regular inscrito na circunferência, que é igual ao raio R = 12 cm da circunferência.

Como AB é um diâmetro, $BC=BD=120^\circ$ e, consequentemente, o triângulo BCD é equilátero e seus lados são $BC=CD=BD=R\sqrt{3}=12\sqrt{3}\text{ cm}$.

O comprimento do contorno da figura é

$2\pi R+3R\sqrt{3}+4R=R\left(2\pi+3\sqrt{3}+4\right)=R\left(2\cdot 3+3\cdot 1,7+4\right)=15,1\cdot R=181,2\text{ cm}$

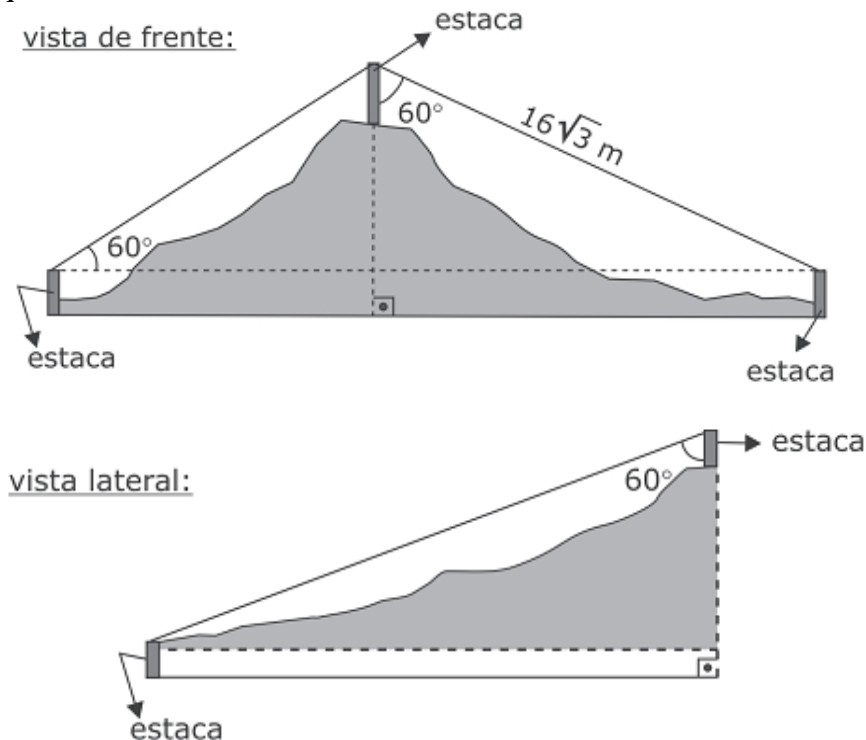
Portanto, o gasto com ouro foi $181,2 \cdot \frac{450}{10} = 8154$ reais.

18) Sobre os lados do triângulo equilátero ABC abaixo tomam-se os pontos D, E e F tais que $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$.

Sobre os lados do triângulo DEF da figura (I), tomam-se os pontos G, H e I tais que $\overline{DG} = \overline{EH} = \overline{FI}$.

Com base nas figuras (I) e (II), tem-se, necessariamente, que
a) o triângulo GHI é isósceles.
b) os triângulos DGI, GEH e HFI são retângulos.
c) $\overline{IH} \parallel \overline{AB}$, $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{IG} \parallel \overline{BC}$.
d) $G\hat{H}E$ é agudo.

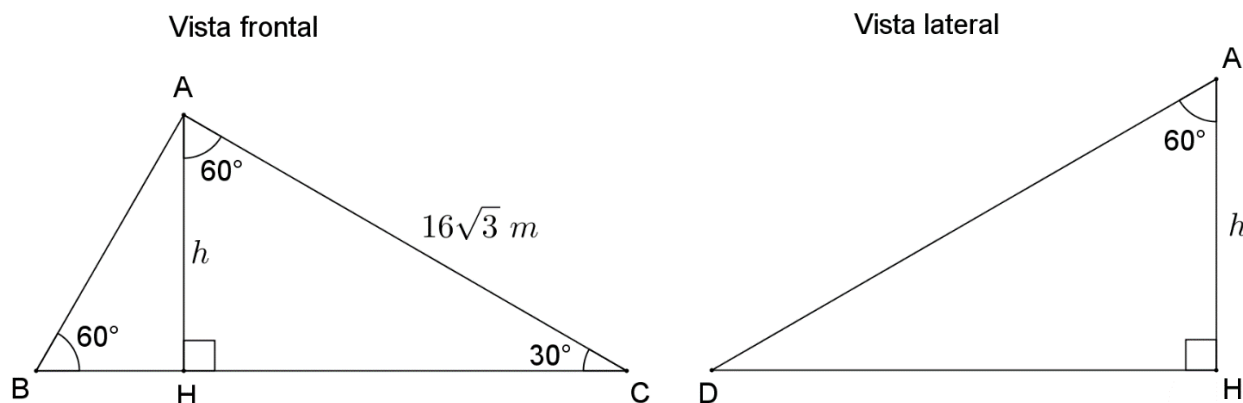
RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
a) CORRETA
Como o triângulo ABC é equilátero e $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$, então $\overline{BD} = \overline{CE} = \overline{AF}$. Portanto, os triângulos ADF, BED e CFE são congruentes (L.A.L.), logo $\overline{DF} = \overline{DE} = \overline{EF}$ e o triângulo DEF é equilátero.
Analogamente, o triângulo GHI também é equilátero e, sendo equilátero, também é isósceles.
b) INCORRETA

Note que as condições $\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}$ e $\overline{DG}=\overline{EH}=\overline{FI}$ podem ser satisfeitas para diversas medidas desses segmentos. Assim, os ângulos $A\hat{D}F=B\hat{E}D=C\hat{F}E$ e $D\hat{G}I=E\hat{H}G=F\hat{I}H$ podem variar de medida.
c) INCORRETA
Vale a mesma argumentação da letra b).
d) INCORRETA
Vale a mesma argumentação da letra b).

19) Chama-se agrimensura a arte de medição de terras. O agrimensor é aquele que obtém as medidas de um terreno. Um fazendeiro comprou um terreno cuja base planificada tem a forma de um retângulo. A pedido do fazendeiro, o agrimensor desenhou a vista frontal e a vista lateral desse terreno indicando medidas precisas que ele obteve utilizando-se de estacas auxiliares de mesma medida.

Tomando-se como referência a forma planificada retangular do terreno cujo custo do metro quadrado foi de 120 reais para o fazendeiro, é correto afirmar que
a) tem mais de 20 m de lateral.
b) sua área total é de $336\ m^2$.
c) foi comprado pelo valor de 96.210 reais.
d) tem menos de 30 m de frente.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Como $A\hat{B}C = 60°$ e $A\hat{C}B = 30°$, então $B\hat{A}C = 90°$.

Assim, no triângulo retângulo ABC, temos: $\text{sen}\,60° = \frac{AC}{BC} = \frac{16\sqrt{3}}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow BC = 32$

No triângulo retângulo ACH, temos: $\text{sen}\,30° = \frac{AH}{AC} = \frac{h}{16\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = 8\sqrt{3}$

No triângulo retângulo ADH, temos: $\text{tg}\,60° = \frac{DH}{AH} = \frac{DH}{8\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow DH = 24$

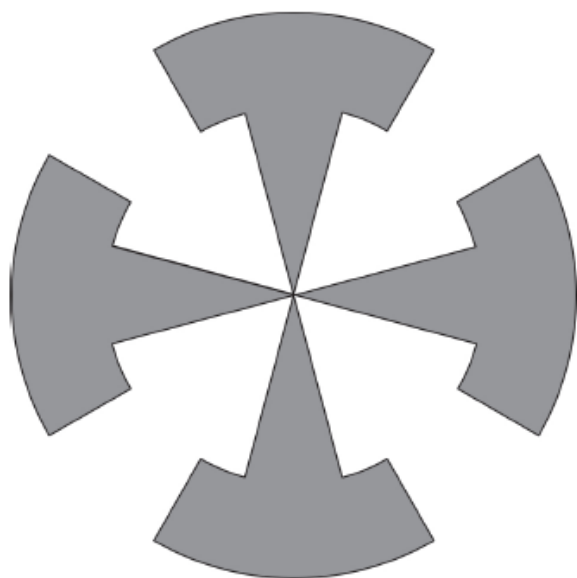
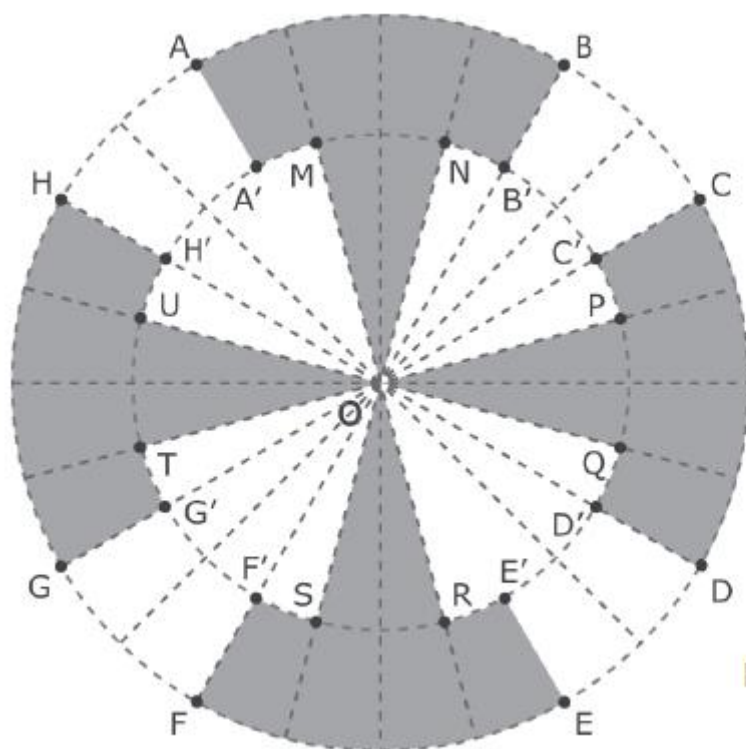
Portanto, a largura (frente) do terreno é BC = 32 m e o comprimento (lateral) é DH = 24 m.

a) CORRETA: A lateral do terreno é 24 m.

b) INCORRETA: A área total do terreno é $32 \cdot 24 = 768\ \text{m}^2$.

c) INCORRETA: O terreno foi comprado por $120 \cdot 768 = 92160$ reais.

d) INCORRETA: A frente do terreno é 32 m.

20) O símbolo para a "Cooperativa Agrícola Bequeana" é o desenho da figura abaixo.

Tal símbolo foi elaborado seguindo as indicações na figura a seguir.

Dados: $\overline{OH} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} ... \overline{OH} = 20 \text{ cm}$

$\overline{OA'} \equiv \overline{OM} \equiv \overline{ON} \equiv \overline{OB'} \equiv ... \equiv \overline{OU} \equiv \overline{OH'} = 15 \text{ cm}$

Na figura (II) o espaço entre duas linhas retas tracejadas e consecutivas, indica um ângulo central de 15º. A área hachurada da figura, em cm^2, mede

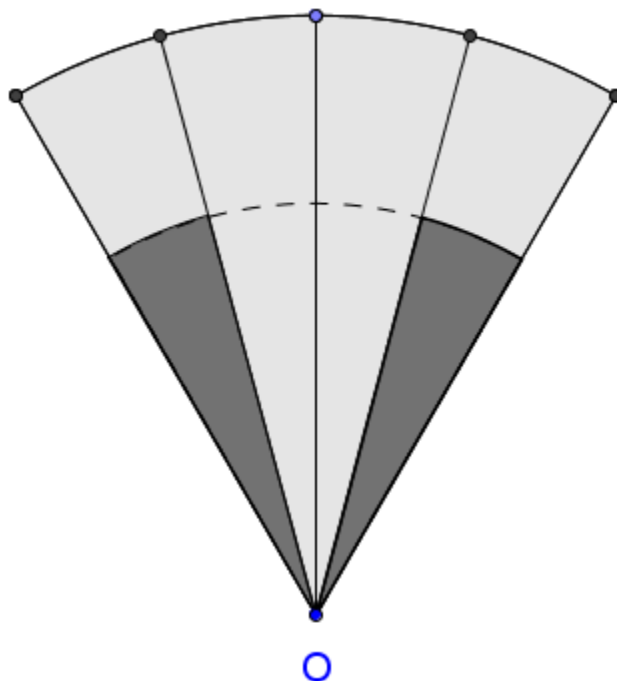
a) $\frac{475\pi}{3}$

b) $\frac{575\pi}{6}$

c) $\frac{435\pi}{2}$

d) $\frac{575\pi}{3}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

A área total desejada é obtida multiplicando-se por 4 a área mais clara indicada na figura acima (S), que é formada por um setor circular de 60º e raio 20 cm menos dois setores circulares de 15º e raio 15 cm.

$$S = \frac{1}{6} \cdot \left(\pi \cdot 20^2\right) - 2 \cdot \frac{1}{24} \cdot \left(\pi \cdot 15^2\right) = \frac{2 \cdot 400\pi - 225\pi}{12} = \frac{575\pi}{12}$$

$$S_{TOTAL} = 4 \cdot \frac{575\pi}{12} = \frac{575\pi}{3} \text{ cm}^2$$

****

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo do lançamento dos próximos volumes da coleção X-MAT!

Volumes já lançados:

Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2016 (2ª edição)
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2016 (2ª edição)
Livro X-MAT Volume 5 COLÉGIO NAVAL 1984-2016 (2ª edição)
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016